ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΚΑΙ
ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

A. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

C. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2002

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Α-1. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy = 0\ ,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι $\varrho(x,y)=1/(x^2+y^2)$ *είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής.*

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με τη συνάρτηση $\varrho(x,y)=1/\ (x^2+y^2)$, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\left(2+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx+\left(1+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy = 0\ ,$$

η οποία είναι μια εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη, αφού

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Άρα, η ϱ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Τώρα, αναζητούμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2+\frac{x}{x^2+y^2}\quad \text{και}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

Τότε έχουμε

$$f(x,y) = 2x+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+g(y)\ ,$$

όπου g(y) μια αυθαίρετη συνάρτηση. Όμως, θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+g'(y) = 1+\frac{x}{x^2+y^2}$$

και άρα $g'(y)=1$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε $g(y)=y$ και έτσι θα είναι

$$f(x,y) = 2x+y+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο $f(x,y)=c$, δηλαδή από τον τύπο

$$2x+y+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = c\ ,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Α-2. *Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1},$$

όπου α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 *είναι σταθερές με* $\alpha_1\beta-\alpha\beta_1\neq 0$, *μετασχηματίζεται σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση με την αντικατάσταση*

$$x=X+x_0\,,\ \ y=Y+y_0\,,$$

όπου x_0, y_0 *είναι τέτοια ώστε*

$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0\,,\ \ \alpha_1 x_0+\beta_1 y_0+\gamma_1=0\,.$$

Στη συνέχεια , να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x-y+3)dx+(x+2y-3)dy=0.$$

Έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dY}\frac{dY}{dX}\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

και

$$\alpha x+\beta y+\gamma=\alpha X+\beta Y+(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma)=\alpha X+\beta Y\,,$$

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=\alpha_1 X+\beta_1 Y+(\alpha_1 x_0+\beta_1 y_0+\gamma_1)=\alpha_1 X+\beta_1 Y.$$

Έτσι, η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\alpha X+\beta Y}{\alpha_1 X+\beta_1 Y}\,.$$

Για τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+y-3}{x+2y-3},$$

έχουμε $x_0=-1$, $y_0=2$ και έτσι η αντικατάσταση

$$x=X-1\,,\ \ y=Y+2$$

μετασχηματίζει αυτή στην ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-X+Y}{X+2Y}\,.$$

Για $Y=XZ$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$X\frac{dZ}{dX}+Z=\frac{-1+Z}{1+2Z}$$

ή

$$X\frac{dZ}{dX}=-\frac{1+2Z^2}{1+2Z}\,.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, γιατί γράφεται στη μορφή

$$\frac{1+2Z}{1+2Z^2}dZ=-\frac{1}{X}dX\,.$$

Οι λύσεις αυτής δίνονται από τον τύπο

$$\int \frac{1+2Z}{1+2Z^2}\, dZ = - \int \frac{1}{X}\, dX+\alpha ,$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τελικά έχουμε

$$\sqrt{2}\mathrm{Artg}(Z\sqrt{2})+\log(X^2+2X^2Z^2) = 2\alpha.$$

Έτσι, αφού $Z=Y/X=(y-2)/(x+1)$, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$\sqrt{2}\ \mathrm{Artg}\left(\frac{y-2}{x+1}\sqrt{2}\right) + \log\left[(x+1)^2+2(y-2)^2\right] = c ,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Α-3. *Δίνεται η διαφορική εξίσωση*

$$y' +by = \sin ax,$$

όπου $a\neq 0$, $b\neq 0$ *είναι σταθερές. Να επιλυθεί η εξίσωση αυτή. Αν* $b>0$ *και* y *είναι μια λύση της, υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$;

Η διαφορική εξίσωσή μας είναι γραμμική και έτσι για τη γενική λύση της y έχουμε

$$y = e^{-\int bdx}\left[c+\int (\sin ax)e^{\int bdx}\, dx\right]$$

$$= e^{-bx}\left(c+\int e^{bx}\sin ax dx\right)$$

και επομένως

$$y = ce^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2}(b\sin ax-a\cos ax),$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Αν $b>0$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-bx} = 0$. Από την άλλη μεριά, το $\lim\limits_{x\to\infty}(b\sin ax-a\cos ax)$ δεν υπάρχει. Άρα, για $b>0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Α-4. *Να βρεθούν οι συναρτήσεις* g(y) *για να είναι η*

$$g(y)e^y dx+xydy = 0$$

μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη.

Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)e^y\right] = \frac{\partial}{\partial x}(xy),$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$g'(y)+g(y) = ye^{-y}.$$

Έτσι, έχουμε

$$g(y) = e^{-\int dy}\left(c+\int ye^{-y}e^{\int dy}dy\right) = e^{-y}\left(c+\int ydy\right)$$

και επομένως

$$g(y) = e^{-y}\left(c+\frac{y^2}{2}\right),$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Α-5. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy' - y\log y = x^2y.$$

Η διαφορική μας εξίσωση γράφεται

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x}\log y = x.$$

Έτσι, θέτοντας $z=\log y$ οπότε $z' = y' / y$, η εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' - \frac{1}{x}z = x.$$

Για τη γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης έχουμε

$$z = e^{-\int (-\frac{1}{x})dx}\left[c+\int xe^{\int (-\frac{1}{x})dx}\,dx\right] = |x|\left(c+\int \frac{x}{|x|}\,dx\right)$$

και άρα

$$z = |x|\,(c+|x|),$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσής μας είναι

$$y = \exp[|x|(c+|x|)] \quad \text{(c αυθαίρετη σταθερά)}.$$

Α-6. *Για τη διαφορική εξίσωση*

$$\left[y+x(x^2+y^2)^2\right]dx+\left[y(x^2+y^2)^2-x\right]dy = 0$$

να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\varrho(x,y)=(x^2+y^2)^m$, *όπου* m *είναι ένας ακέραιος.*

Η συνάρτηση $\varrho(x,y)=(x^2+y^2)^m$ (m ακέραιος) θα είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[y(x^2+y^2)^m+x(x^2+y^2)^{m+2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^2+y^2)^{m+2}-x(x^2+y^2)^m\right]$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$(x^2+y^2)^m+2my^2(x^2+y^2)^{m-1}+2(m+1)xy(x^2+y^2)^{m+1}$$
$$=2(m+1)xy(x^2+y^2)^{m+1}-(x^2+y^2)^m-2mx^2(x^2+y^2)^{m-1}$$

ή

$$(2+2m)(x^2+y^2)^m=0.$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $m=-1$. Άρα, ϱ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας τότε και μόνο τότε αν

$$\varrho(x,y)=1/(x^2+y^2).$$

Α-7. *Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση*

$$ay'+by=ke^{-\lambda x},$$

όπου a, b *και* k *είναι θετικές σταθερές και* λ *είναι μια μη αρνητική σταθερά. Ας είναι* y *μια λύση αυτής. Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Αν* $\lambda=0$, *τότε* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=k/b$.

(ii) *Αν* $\lambda>0$, *τότε* $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=0$.

Η εξίσωσή μας γράφεται

$$y'+ry=Re^{-\lambda x},$$

όπου $r=(b/a)>0$ και $R=(k/a)>0$, και είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Για τη γενική λύση y αυτής έχουμε

$$y=e^{-\int r dx}\left(c+\int Re^{-\lambda x}e^{\int r dx}\,dx\right)=e^{-rx}\left[c+R\int e^{(r-\lambda)x}\,dx\right]$$

και άρα

$$y=\begin{cases} e^{-rx}(c+Rx), & \text{αν } r=\lambda \\ ce^{-rx}+\dfrac{R}{r-\lambda}e^{-\lambda x}, & \text{αν } r\neq\lambda, \end{cases}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Αν $\lambda=0$, τότε (αφού $r\neq\lambda$) είναι

$$y=ce^{-rx}+\frac{R}{r}$$

και επομένως $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=R/r=k/b$. Αν $\lambda>0$, τότε βλέπουμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις όπου $r=\lambda$ ή $r\neq\lambda$, ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=0$.

Α-8. *Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών με τις σημειούμενες αντικαταστάσεις:*

(i) $\cos y \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\sin y = 1$, $y(1)=0$; $\sin y = z$.

(ii) $(y+1)\dfrac{dy}{dx} + x(y^2+2y) = x$, $y(0)=1$; $y^2+2y=z$.

(i) Θέτουμε $z=\sin y$, οπότε $z' = y' \cos y$, και η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' + \frac{1}{x} z = 1.$$

Για τη γενική λύση αυτής έχουμε για $x>0$

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(c + \int x e^{\int \frac{dx}{x}} dx\right) = \frac{1}{x}\left(c + \int x dx\right)$$

και άρα

$$z = \frac{1}{x}\left(c + \frac{x^2}{2}\right), \ x>0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσής μας είναι

$$y = \mathrm{Arsin}\left[\frac{1}{x}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)\right], \ x>0 \ \ (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Η αρχική συνθήκη $y(1)=0$ δίνει $c=-1/2$ και άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \mathrm{Arsin}\left[\frac{1}{2x}\left(-1+x^2\right)\right], \ x>0.$$

(ii) Για $z=y^2+2y$, έχουμε $z' = 2(y+1)y'$ και έτσι η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' + 2xz = 2x.$$

Η γενική λύση αυτής είναι

$$z = e^{-\int 2x dx}\left(c + \int 2x e^{\int 2x dx} dx\right) = e^{-x^2}\left(c + \int 2x e^{x^2} dx\right) = c e^{-x^2} + 1,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τώρα όλες οι λύσεις της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο

$$y^2 + 2y = c e^{-x^2} + 1 \ \ (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Για $y(0)=1$ βρίσκουμε $c=2$ και επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = -1 + \sqrt{2\left(e^{-x^2}+1\right)}.$$

Α-9. *Να βρεθεί η λύση* y *του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$y' = ay-by^2,\ y(0)=c,$$

όπου a>0, b>0 *και* c≥0 *είναι σταθερές. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι* $\lim_{x\to\infty} y(x)=a/b$ *για* c>0, *ενώ* $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ *για* c=0.

Για c=0, το πρόβλημα αρχικών τιμών δέχεται τη μηδενική λύση $y(x)\equiv 0$ που πληροί την $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι c>0. Η διαφορική μας εξίσωση είναι μια εξίσωση Bernoulli. Έτσι, γράφουμε αυτή στη μορφή

$$-\frac{y'}{y^2}+a\frac{1}{y}=b$$

και εκτελούμε τον μετασχηματισμό $z=1/y$, οπότε καταλήγουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' +az = b.$$

Για τη γενική λύση z αυτής έχουμε

$$z = e^{-\int a dx}\left(C+b\int e^{\int a dx}\,dx\right) = e^{-ax}\left(C+b\int e^{ax}\,dx\right)$$

και άρα

$$z = Ce^{-ax}+b/a,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τώρα, η γενική λύση της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{1}{Ce^{-ax}+b/a} \qquad \text{(C αυθαίρετη σταθερά).}$$

Από την αρχική συνθήκη y(0)=c παίρνουμε $C=\frac{1}{c}-\frac{b}{a}$ και επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{c}-\frac{b}{a}\right)e^{-ax}+\frac{b}{a}}.$$

Αμέσως προκύπτει ότι $\lim_{x\to\infty} y(x)=1/(b/a)=a/b$.

A-10. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$yy' +x = \frac{(x^2+y^2)^2}{2x^2}+\frac{x^2+y^2}{x}, \quad y(1)=1.$$

Θέτουμε $x^2+y^2=z$, οπότε $2(yy' +x)=z'$, και η διαφορική μας εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση Bernoulli

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}z^2.$$

Κάνουμε την αλλαγή u=1/z και έχουμε u'=-z'/z^2, οπότε η εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$u' + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^2}.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c + \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right] = \frac{1}{x^2}\left(c - \int dx\right) = \frac{c-x}{x^2},$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, οι λύσεις της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2}{c-x} \quad (\text{c αυθαίρετη σταθερά}).$$

Για y(1)=1, έχουμε c=3/2. Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \sqrt{-x^2 + \frac{x^2}{\frac{3}{2} - x}}\,.$$

Α-11. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$q(x)y' = yq'(x) - y^2, \quad y(0)=1,$$

όπου q *είναι μια θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο* **R** *και* q(0)=1.

Η μηδενική λύση της εξίσωσης δεν πληροί την αρχική συνθήκη y(0)=1. Η διαφορική μας εξίσωση είναι μια εξίσωση Bernoulli. Έτσι, εκτελούμε την αντικατάσταση z=1/y, οπότε z' =-y'/y^2, και καταλήγουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' + \frac{q'(x)}{q(x)}z = \frac{1}{q(x)}.$$

Η γενική λύση z αυτής είναι

$$z = e^{-\int \frac{q'(x)}{q(x)}dx}\left[c + \int \frac{1}{q(x)}e^{\int \frac{q'(x)}{q(x)}dx}dx\right]$$

$$= \frac{1}{q(x)}\left(c + \int dx\right) = \frac{c+x}{q(x)},$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τώρα, όλες οι (μη μηδενικές) λύσεις της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y = q(x)/(c+x) \quad (\text{c αυθαίρετη σταθερά}).$$

Αφού q(0)=1, η αρχική συνθήκη y(0)=1 δίνει c=1. Έτσι, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = q(x)/\,(1+x).$$

Α-12. *Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού* z=tgy, *να αποδειχθεί ότι η λύση* y *του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx}+xtgy+xtg^3y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$$

έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Για z=tgy, έχουμε $z' = y'/\cos^2 y$ και άρα η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην

$$z' + xz = -xz^3,$$

η οποία είναι μια εξίσωση Bernoulli. Η μηδενική λύση αυτής δεν πληροί την αρχική συνθήκη z(0)=1 (που προκύπτει από την y(0)=π/4). Εκτελούμε τον μετασχηματισμό $u=1/z^2$, οπότε $u'=-2z'/z^3$ και η τελευταία εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$u'-2xu = 2x.$$

Για τη γενική λύση u αυτής έχουμε

$$u = e^{-\int(-2x)dx}\left[c+\int 2xe^{\int(-2x)dx}dx\right] = e^{x^2}\left(c+\int 2xe^{-x^2}dx\right),$$

δηλαδή

$$u = ce^{x^2}-1,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Η γενική λύση της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \pm\, \mathrm{Artg}\left(1/\sqrt{ce^{x^2}-1}\,\right) \quad \text{(c αυθαίρετη σταθερά).}$$

Από την αρχική συνθήκη y(0)=π/4 προκύπτει $\pi/4 = \mathrm{Artg}\left(1/\sqrt{c-1}\right)$, δηλαδή c=2, και άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \mathrm{Artg}\left(1/\sqrt{2e^{x^2}-1}\,\right).$$

Για τη λύση αυτή έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Α-13. *Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση y στο* $[0,\infty)$ *τέτοια ώστε*

$$y(x)+1 = \int_0^x y(t)[ty(t)-1]dt.$$

Η ολοκληρωτική εξίσωσή μας είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y(xy-1),\ y(0)=-1.$$

Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y' + y = xy^2$$

και είναι μια εξίσωση Bernoulli. Η μηδενική λύση αυτής δεν πληροί την αρχική συνθήκη $y(0)=-1$. Εκτελούμε τον μετασχηματισμό $z=1/y$, οπότε $z' = -y'/y^2$ και η τελευταία εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' - z = -x.$$

Η γενική λύση αυτής είναι

$$y = e^{-\int (-1)dx}\left[c+\int (-x)e^{\int (-1)dx}dx\right] = e^{x}\left(c-\int xe^{-x}dx\right) = ce^{x}+x+1,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τώρα, η γενική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{1}{ce^{x}+x+1} \quad \text{(c αυθαίρετη σταθερά).}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0)=-1$ προκύπτει ότι $c=-2$. Άρα, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$y(x) = \frac{1}{-2e^{x}+x+1},\quad x\geq 0.$$

Α-14. *Με την αλλαγή* $y=ue^{mx}$ *(όπου* m *κατάλληλη σταθερά), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(1+y^2e^{2x})y' + y = 0.$$

Έχουμε

$$y = ue^{mx} \quad \text{και} \quad y' = (u'+mu)e^{mx},$$

οπότε η διαφορική μας εξίσωση γίνεται

$$\left[1+u^2e^{2(m+1)x}\right](u'+mu)+u = 0.$$

Επιλέγοντας $m=-1$, έχουμε την εξίσωση

$$(1+u^2)u'-u^3 = 0.$$

Αυτή έχει τη μηδενική λύση $u=0$ που αντιστοιχεί στη μηδενική λύση $y=0$ της αρχικής εξίσωσης. Για να βρούμε τις μη μηδενικές λύσεις της τελευταίας εξίσωσης, τη γράφουμε στη μορφή

$$\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du = dx,$$

οπότε

$$\int\left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du = \int dx+\alpha,$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επομένως,

$$u = ce^{x+1/(2u^2)}$$

με $c=\pm e^{\alpha}\neq 0$. Έτσι, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι η μηδενική λύση $y=0$ και εκείνες που δίνονται από τον τύπο

$$y = c\exp\left(\frac{1}{2y^2e^{2x}}\right) \quad (c\neq 0 \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Α-15. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+y)^2}{x-x^2+xy}, \quad y(1)=1.$$

Θέτουμε $1+y=z$, οπότε η διαφορική μας εξίσωση γίνεται

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{-x^2+xz}.$$

Αυτή είναι μια ομογενής εξίσωση, η οποία με την αντικατάσταση $z=xu$ παίρνει τη μορφή

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{-1+u} \quad ή \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τη μηδενική λύση $u=0$ που αντιστοιχεί στη λύση $y=-1$ της αρχικής εξίσωσης. Η λύση αυτή δεν πληροί την αρχική συνθήκη $y(1)=1$. Τώρα, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{u-1}{u}\,du=\frac{1}{x}\,dx$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Έτσι, παίρνουμε

$$\int\frac{u-1}{u}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx+\alpha$$

ή

$$ux=(\pm e^{\alpha})e^{u},$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Η γενική λύση της αρχικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι αυτή που δίνεται από τον τύπο

$$1+y=ce^{(1+y)/x} \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά με } c\neq 0).$$

Από την αρχική συνθήκη $y(1)=1$ προκύπτει ότι $c=2e^{-2}$ και άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο

$$1+y=2e^{-2}e^{(1+y)/x}.$$

A-16. *Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση*

$$x^2y' + 2xy = 1,\ x>0.$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$. *Στη συνέχεια , να βρεθεί η λύση* y_0 *με* $y_0(2)=2y_0(1)$.

Η εξίσωσή μας γράφεται

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2},\ x>0$$

και είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Για τη γενική λύση y αυτής έχουμε για όλα τα x>0

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(c+\int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{x^2}\left(c+\int dx\right),$$

δηλαδή

$$y = (c+x)/\,x^2,\ x>0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Από τον τύπο αυτόν προκύπτει ότι για κάθε λύση y είναι $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$. Τώρα, για τη λύση y_0 θα έχουμε $(c+2)/\,4=2(c+1)$ και άρα $c=-6/\,7$. Επομένως, θα είναι

$$y_0(x) = \left(-\frac{6}{7}+x\right)x^{-2},\ x>0.$$

A-17. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση* y *της διαφορικής εξίσωσης*

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$$

είναι

$$y(k\pi)-y(0) = k\pi \quad (k \text{ ακέραιος}).$$

Η διαφορική μας εξίσωση είναι γραμμική και έτσι για τη γενική της λύση y έχουμε

$$y = e^{-\int \cos x dx}\left(c+\int e^{-\sin x}e^{\int \cos x dx}dx\right) = e^{-\sin x}\left(c+\int dx\right),$$

δηλαδή

$$y = (c+x)e^{-\sin x},$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Από τον τύπο αυτόν προκύπτει ότι, για οποιονδήποτε ακέραιο k, είναι $y(k\pi)-y(0)=k\pi$, αφού $\sin k\pi=\sin 0=0$.

A-18. *Με τη βοήθεια της αντικατάστασης* $y'/y=z$, *να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$x^2yy''-(xy'-y)^2 = 0\ ;\ y(1)=1,\ y'(1)=0.$$

Η διαφορική μας εξίσωση γράφεται

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}\right)^2 = 0.$$

Θέτουμε $y'/y=z$. Τότε

$$z' = \frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad \text{και άρα} \quad \frac{y''}{y} = z'+z^2.$$

Έτσι, η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2},$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$z = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(c_1+\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)=\frac{1}{x^2}\left(c_1+\int dx\right)=\frac{c_1+x}{x^2},$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τώρα, έχουμε

$$\frac{dy}{y}=\frac{c_1+x}{x^2}dx$$

και άρα

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{c_1+x}{x^2}dx+\alpha,$$

όπου α είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τελικά, βρίσκουμε

$$y = c_2xe^{-c_1/x},$$

όπου $c_2=\pm e^{\alpha}\neq 0$. Τέλος, από τις αρχικές συνθήκες $y(1)=1$ και $y'(1)=0$ προκύπτει ότι $c_1=-1$, $c_2=e^{-1}$. Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = xe^{-1+1/x}.$$

A-19. *Για τη διαφορική εξίσωση*

$$3(x^2+xy^2+2y^3)y'+5x^2+2xy+3y^3 = 0,$$

να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\varrho(x,y) = (x+y)^m,$$

όπου m *είναι ένας ακέραιος.*

Η διαφορική μας εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$(5x^2+2xy+3y^3)dx+3(x^2+xy^2+2y^3)dy = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τη συνάρτηση $\varrho(x,y)=(x+y)^m$ (m ακέραιος), παίρνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^m(5x^2+2xy+3y^3)dx+3(x+y)^m(x^2+xy^2+2y^3)dy = 0.$$

Αυτή είναι αμέσως ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)^m(5x^2+2xy+3y^3)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[3(x+y)^m(x^2+xy^2+2y^3)\right],$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$(m-2)(2x^2+2xy-3xy^2-3y^3) = 0.$$

Αυτό συμβαίνει τότε και μόνο τότε αν m=2. Ένας λοιπόν ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η συνάρτηση

$$\varrho(x,y) = (x+y)^2.$$

A-20. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου* λ *για τις οποίες η συνάρτηση* $y=\lambda-x^2$ *είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$y' = (x^2+y+1)\left(x^2+y-\frac{3}{2}\right)+1-2x.$$

Να βρεθούν οι τιμές αυτές και να επιλυθεί η εξίσωση με χρήση καθεμιάς των μερικών λύσεων που ορίζονται για τις τιμές αυτές. Είναι οι δύο γενικές λύσεις ισοδύναμες;

Η συνάρτηση $y=\lambda-x^2$ θα είναι μια λύση της διαφορικής μας εξίσωσης αν και μόνο αν

$$-2x = (x^2+\lambda-x^2+1)\left(x^2+\lambda-x^2-\frac{3}{2}\right)+1-2x$$

ή

$$0 = (\lambda+1)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)+1,$$

δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda=1$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Ας πάρουμε $\lambda=1$, οπότε έχουμε τη μερική λύση $y_1=1-x^2$. Η εξίσωσή μας είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati. Έτσι, θέτουμε

$$y = y_1+z = 1-x^2+z$$

και η εξίσωσή μας γίνεται

$$z' - \frac{3}{2}z = z^2,$$

η οποία είναι μια εξίσωση Bernoulli. Για $w=1/z$, είναι $w' = -z'/z^2$ και η τελευταία εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$w' + \frac{3}{2} w = -1,$$

της οποίας η γενική λύση είναι

$$w = e^{-\int \frac{3}{2} dx}\left[c + \int (-1) e^{\int \frac{3}{2} dx} dx\right] = ce^{-(3/2)x} - \frac{2}{3},$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας είναι οι

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x^2 + \dfrac{1}{ce^{-(3/2)x} - \frac{2}{3}} \end{cases} \quad \text{(c αυθαίρετη σταθερά).}$$

Στη συνέχεια, ας εργασθούμε με τη μερική λύση $y_2 = -\frac{1}{2} - x^2$ που προκύπτει για $\lambda = -\frac{1}{2}$. Θέτουμε

$$y = y_2 + z = -\frac{1}{2} - x^2 + z$$

και η εξίσωσή μας γίνεται

$$z' + \frac{3}{2} z = z^2.$$

Για $w = 1/z$, η τελευταία εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$w' - \frac{3}{2} w = -1,$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται από τον τύπο

$$w = Ce^{(3/2)x} + \frac{2}{3} \quad \text{(C αυθαίρετη σταθερά).}$$

Επομένως, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$(**) \qquad \begin{cases} y_2 = -\frac{1}{2} - x^2 \\ y = -\frac{1}{2} - x^2 + \dfrac{1}{Ce^{(3/2)x} + \frac{2}{3}} \end{cases} \quad \text{(C αυθαίρετη σταθερά).}$$

Θα διαπιστώσουμε τώρα ότι οι τύποι (*) και (**) δίνουν το ίδιο σύνολο λύσεων. Παρατηρούμε πρώτα ότι για c=0 ο τύπος

$$(T_1) \qquad y = 1 - x^2 + \frac{1}{ce^{-(3/2)x} - \frac{2}{3}}$$

δίνει την λύση y_2 και ανάλογα η λύση y_1 προκύπτει από τον τύπο

$$(T_2) \qquad y = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{Ce^{(3/2)x} + \frac{2}{3}}$$

για C=0. Στη συνέχεια, παίρνουμε για C≠0

$$-\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{Ce^{(3/2)\,x}+\frac{2}{3}}=1-x^2+\left[-\frac{3}{2}+\frac{1}{Ce^{(3/2)\,x}+\frac{2}{3}}\right]$$

$$=1-x^2+\frac{1}{-\frac{4}{9C}\,e^{-(3/2)x}-\frac{2}{3}}\,,$$

ενώ για $c\neq 0$ έχουμε

$$1-x^2+\frac{1}{ce^{-(3/2)\,x}-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}-x^2+\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{ce^{-(3/2)x}-\frac{2}{3}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{-\frac{4}{9c}\,e^{(3/2)x}+\frac{2}{3}}\,.$$

Έτσι, για $C\neq 0$ ο τύπος (T_2) οδηγεί στον (T_1) αν θέσουμε $c=-\frac{4}{9C}$ και ανάλογα για $c\neq 0$ ο (T_1) οδηγεί στον τύπο (T_2) αν θέσουμε $C=-\frac{4}{9c}$. Μετά από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι οι τύποι (*) και (**) δίνουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

B-1. *Ας είναι* f *μια συνάρτηση στο διάστημα* $(0,\infty)$ *που δεν μηδενίζεται σε* n *τουλάχιστον σημεία. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$f_k(x) = x^{k-1}f(x),\ x\in(0,\infty)\ \ (k=1,\dots,n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας υποθέσουμε ότι $c_1f_1+\dots+c_nf_n=0$, όπου c_k $(k=1,\dots,n)$ είναι σταθερές. Τότε

$$\left(c_1+c_2x+\dots+c_nx^{n-1}\right)f(x)=0 \text{ για όλα τα } x>0.$$

Ας είναι x_k $(k=1,\dots,n)$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του διαστήματος $(0,\infty)$ στα οποία η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται. Τότε

$$\begin{cases} c_1+c_2x_1+\dots+c_nx_1^{n-1}=0 \\ c_1+c_2x_2+\dots+c_nx_2^{n-1}=0 \\ \quad\vdots \\ c_1+c_2x_n+\dots+c_nx_n^{n-1}=0\,. \end{cases}$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους $c_1, c_2, \dots, c_n$ έχει μόνο τη μηδενική λύση $c_1=c_2=\dots=c_n=0$, αφού η ορίζουσά του είναι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n}(x_i-x_j) \neq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει τη γραμμική ανεξαρτησία των f_k $(k=1,\dots,n)$.

B-2. *Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(2x+1)y''-4(x+1)y'+4y = 0\ ,\ x > -\frac{1}{2},$$

αν είναι γνωστό ότι δέχεται λύσεις των μορφών $y_1(x)=e^{cx},\ x > -\frac{1}{2}$ *και* $y_2(x)=\alpha x+\beta,\ x > -\frac{1}{2}$ *(όπου c, α, β σταθερές). Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση* y_0 *με*

$$y_0(0)=0\ ,\ y_0'(0)=-1.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι y_1 και y_2 είναι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης αν και μόνο αν $c=2$ και $\alpha=\beta$. Έτσι, έχουμε τις λύσεις

$$y_1(x) =e^{2x},\ x > -\frac{1}{2} \text{ και } y_2(x) = x+1,\ x > -\frac{1}{2}.$$

Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(x) =\det\begin{pmatrix} e^{2x} & x+1 \\ 2e^{2x} & 1 \end{pmatrix} = -(2x+1)e^{2x} < 0$$

για όλα τα $x > -\frac{1}{2}$. Άρα, όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{2x}+c_2(x+1),\ x > -\frac{1}{2},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Ιδιαίτερα, για τη λύση y_0 βρίσκουμε $c_1=-1$ και $c_2=1$ και επομένως

$$y_0(x) = -e^{2x}+x+1,\ x > -\frac{1}{2}.$$

B-3. *Με τον μετασχηματισμό* $t=\sin x$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(\sin^2 x)y''+(\operatorname{tg}x)y'+k^2(\cos^2 x)y = 0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

όπου k *είναι μια θετική σταθερά.*

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $t=\sin x$ και παίρνουμε

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos x\,\frac{dy}{dt}$$

και

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\cos x\,\frac{dy}{dx}\right) = \cos x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\sin x\,\frac{dy}{dt} = \cos^2 x\,\frac{d^2y}{dt^2}-\sin x\frac{dy}{dt}.$$

Έτσι, η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+k^2y = 0\ ,\ t\in(0,1).$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση Euler και έτσι εκτελούμε τον μετασχηματισμό s=logt, οπότε παίρνουμε

$$t\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds} \quad \text{και} \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{dy}{ds}+\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Τότε, καταλήγουμε στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{ds^2}+k^2y=0\ ,\ \ s\in(-\infty,0)\ ,$$

της οποίας όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο

$$y(s)=c_1\cos ks+c_2\sin ks\ ,\ \ s<0 \quad (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Έτσι, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x)=c_1\cos(k\log\sin x)+c_2\sin(k\log\sin x)\ ,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-4. *Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(\sin^2x)y''-2(\sin x\cos x)y'+(1+\cos^2x)y=\sin^3x\ ,\ \ x\in(0,\pi),$$

αφού αποδειχθεί ότι $y_1(x)=\sin x$, $x\in(0,\pi)$ *και* $y_2(x)=x\sin x$, $x\in(0,\pi)$ *είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.*

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί

$$W(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix}\sin x & x\sin x\\ \cos x & x\cos x+\sin x\end{pmatrix}=\sin^2x>0$$

για όλα τα $x\in(0,\pi)$. Τώρα, έχουμε για κάθε $x\in(0,\pi)$

$$W_1(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix}0 & x\sin x\\ 1 & x\cos x+\sin x\end{pmatrix}=-x\sin x$$

και

$$W_2(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix}\sin x & 0\\ \cos x & 1\end{pmatrix}=\sin x$$

και έτσι μια μερική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι για $x\in(0,\pi)$

$$y_\mu(x)=y_1(x)\int_{\pi/2}^{x}\frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\frac{\sin^3t}{\sin^2t}\,dt+y_2(x)\int_{\pi/2}^{x}\frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\frac{\sin^3t}{\sin^2t}\,dt$$

$$=\sin x\int_{\pi/2}^{x}(-t)\,dt+x\sin x\int_{\pi/2}^{x}dt$$

$$= \sin x\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{x^2}{2}\right)-x\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Έτσι, όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, ήτοι από τον τύπο

$$y(x)=\left(c_1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{x^2}{2}\right)\sin x+\left(c_2-x+\frac{\pi}{2}\right)x\sin x\ ,\ x\in(0,\pi),$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Β-5. *Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού* $z=\frac{x}{\sin x}y$, *να βρεθεί η λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης*

$$xy''+2y'+xy=0,\ x\in(0,\pi)$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Θέτουμε $z=\frac{x}{\sin x}y$, $x\in(0,\pi)$ και έχουμε για κάθε $x\in(0,\pi)$

$$y=\frac{\sin x}{x}z,$$

$$y'=\frac{\sin x}{x}z'+\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}z,$$

$$y''=\frac{\sin x}{x}z''+2\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}z'+\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}z.$$

Έτσι, βλέπουμε (μετά τις πράξεις) ότι η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\sin x)z''+2(\cos x)z'=0,$$

η οποία για $z'=u$ γίνεται

$$(\sin x)u'+2(\cos x)u=0.$$

Οι λύσεις της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u(x)=\frac{c_1}{\sin^2 x},\ x\in(0,\pi),$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα, έχουμε

$$z(x)=-c_1\text{ctg}x+c_2\ ,\ x\in(0,\pi)$$

με c_2 μια αυθαίρετη σταθερά. Τελικά, βρίσκουμε ότι οι λύσεις της αρχικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x)=-c_1\frac{\cos x}{x}+c_2\frac{\sin x}{x}\ ,\ x\in(0,\pi).$$

Για τη λύση με $y(\pi/2)=0$ και $y'(\pi/2)=1$, έχουμε $c_1=\pi/2$, $c_2=0$ και άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$y(x)=-\frac{\pi}{2}\frac{\cos x}{x}\ ,\ x\in(0,\pi).$$

B-6. *Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$x^2y''+4xy'+(2+x^2)y = x^2\ ,\ x > 0\ ,$$

με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z = x^2y$.

Έχουμε για κάθε x>0

$$y = \frac{1}{x^2}z\ ,\ \ y' = \frac{1}{x^2}z' - \frac{2}{x^3}z\ ,\ \ y'' = \frac{1}{x^2}z'' - \frac{4}{x^3}z' + \frac{6}{x^4}z$$

και έτσι η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$z''+z = x^2.$$

Οι λύσεις αυτής είναι

$$z(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x^2 - 2\ ,\ x>0$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Επομένως, όλες οι λύσεις της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(c_1\cos x + c_2\sin x) + 1 - \frac{2}{x^2}\ ,\ x>0\ \ (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές})$$

B-7. *Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$xy'''-y''-xy'+y = 0\ ,\ x>0.$$

Η διαφορική μας εξίσωση γράφεται

$$x(y'''-y')-(y''-y) = 0$$

και έτσι, για $y''-y=z$, αυτή γίνεται

$$xz'-z = 0.$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$z(x) = c_1x\ ,\ x>0,$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$y''-y = c_1x.$$

Έτσι, βρίσκουμε ότι οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_2e^x + c_3e^{-x} - c_1x\ ,\ x>0\ \ (c_1, c_2, c_3 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-8. *Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+4xy'+q(x)y = 0\ ,$$

όπου q *είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα* I με $0\in I$. *Αν οι συναρτήσεις* u(x), $x\in I$ *και* xu(x), $x\in I$ *είναι λύσεις αυτής και* u(0)=1, *να βρεθούν οι συναρτήσεις* u *και* q.

Αφού οι συναρτήσεις u(x), $x\in I$ και xu(x), $x\in I$ είναι λύσεις θα έχουμε για όλα τα $x\in I$

$$u''(x)+4xu'(x)+q(x)u(x) = 0$$

και

$$xu''(x)+\left(2+4x^2\right)u'(x)+[4x+xq(x)]u(x) = 0.$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε

$$u'(x)+2xu(x) = 0,\ x\in I$$

και άρα, αφού u(0)=1, έχουμε

$$u(x)= u(0)\exp\left(-\int_0^x 2tdt\right) = e^{-x^2},\ x\in I.$$

Στη συνέχεια, λαμβάνουμε

$$q(x) = -\frac{1}{u(x)}[u''(x)+4xu'(x)] = -4x^2-2\ ,\ x\in I.$$

B-9. *Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y = (x^2+1)^2,\ x>0\ ;\ y(1)=1,\ y'(1)=0$$

με το δεδομένο ότι η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δέχεται μια λύση y_1 *της μορφής* $y_1(x)=x+\alpha$, $x>0$ (α *σταθερά*).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $y_1(x)=x+\alpha$, $x>0$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης αν και μόνο αν α=0. Επομένως έχουμε $y_1(x)=x$, $x>0$. Θέτουμε $y=y_1z$, δηλαδή y=xz για x>0, οπότε παίρνουμε

$$y' = xz'+z \quad \text{και} \quad y'' = xz''+2z' \quad \text{για κάθε } x>0.$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$x(x^2+1)z''+2z' = (x^2+1)^2,\ x>0.$$

Στη συνέχεια, θέτουμε z'=u και καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$x(x^2+1)u'+2u= (x^2+1)^2,\ x>0.$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$u(x) = c_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right),\ x>0,$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, θα είναι

$$z(x) = c_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+c_2\ ,\ x>0$$

με c_2 μια αυθαίρετη σταθερά. Τελικά, έχουμε

$$y(x) = c_1\left(x^2-1\right) + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c_2x\,,\ x>0$$

(όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές). Από τις αρχικές συνθήκες $y(1)=1$, $y'(1)=0$ παίρνουμε $c_1=-1$, $c_2=1/3$ και άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\,,\ x>0.$$

B-10. *Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού* $t=x^2$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$xy''-y'+x^3y = 0,\ x>0.$$

Για κάθε $x>0$, έχουμε

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2x\frac{dy}{dt}\,,$$

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2x\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt} + 2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt} + 4x^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

και έτσι η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$4\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0,\ t>0.$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$y(t) = c_1\cos(t/2) + c_2\sin(t/2),\ t>0\quad (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Άρα, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1\cos(x^2/2) + c_2\sin(x^2/2),\ x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-11. *Να βρεθεί μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση* f *στο διάστημα* $[0,2]$ *τέτοια ώστε* $f(0)=0$, $f'(0)=1$ *και*

$$f''(x)-f(x) = 0 \ \textit{για}\ x\in[0,1];\quad f''(x)-9f(x) = 0\ \textit{για}\ x\in[1,2].$$

Έχουμε

$$f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}\ \text{ για } x\in[0,1],$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Αφού $f(0)=0$, $f'(0)=1$, βρίσκουμε ότι $c_1=1/2$, $c_2=-1/2$ και άρα είναι

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ \text{ για } x\in[0,1].$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε

$$f(x) = c_3e^{3x}+c_4e^{-3x} \text{ για } x\in[1,2],$$

όπου c_3, c_4 είναι σταθερές. Αλλά θα πρέπει να είναι

$$\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right) = c_3e^3+c_4e^{-3}.$$

Εξάλλου, πρέπει $f'_-(1) = f'_+(1)$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right) = 3\left(c_3e^3-c_4e^{-3}\right).$$

Έτσι, έχουμε

$$c_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^4}\right), \quad c_4 = \frac{1}{6}\left(e^4-2e^2\right)$$

και άρα

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^4}\right)e^{3x} + \frac{1}{6}\left(e^4-2e^2\right)e^{-3x} \text{ για } x\in[1,2].$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$f''_-(1) = \frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right) \neq \frac{9}{2}\left(e-e^{-1}\right) = f''_+(1)$$

Άρα, δεν υπάρχει συνάρτηση f με τις ιδιότητες αυτές.

Β-12. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(1-x)y''+xy'-y = 0, \; x>1$$

με το δεδομένο ότι έχει κοινή λύση με την εξίσωση

$$2x(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(2x+1)y = 0, \; x>1.$$

Αν y_1 είναι μια κοινή λύση των εξισώσεων, τότε, με απαλειφή του y_1'' μεταξύ των δύο εξισώσεων, προκύπτει ότι

$$y_1'-y_1 = 0$$

και άρα μπορούμε να πάρουμε

$$y_1(x) = e^x, \; x>1.$$

Εκτελούμε τώρα τον μετασχηματισμό $y=y_1z$. Τότε για κάθε $x>1$

$$y = e^xz, \; y' = e^x(z'+z) \text{ και } y'' = e^x\left(z''+2z'+z\right)$$

και έτσι η διαφορική μας εξίσωση γίνεται

$$(x-1)z''+(x-2)z' = 0, \; x>1.$$

Αν θέσουμε $z'=u$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)u'+(x-2)u = 0, \; x>1,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$u(x) = c_1(x-1)e^{-x}, \; x>1 \quad (c_1 \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε

$$z(x) = -c_1xe^{-x}+c_2, \; x>1 \quad (c_2 \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Άρα, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = -c_1x+c_2e^x,\ x>1$$

(όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές).

Β-13. *Δίνεται η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 1+x,\ x>-1,$$

όπου p *και* q *είναι συνεχείς συναρτήσεις στο* $(-1,\infty)$. *Ας υποθέσουμε ότι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η* $y_1(x)=(1+x)^2$, $x>-1$ *και ότι η ορίζουσα* Wronski *δύο οποιωνδήποτε λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι σταθερά. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση.*

Σύμφωνα με τον τύπο του Liouville, για την ορίζουσα Wronski δύο οποιωνδήποτε λύσεων $\bar{y}$ και $\hat{y}$ της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης ισχύει

$$W(\bar{y},\hat{y})(x) = W(\bar{y},\hat{y})(0)\exp\left[-\int_0^x p(t)dt\right] \text{ για κάθε } x>-1$$

και, αφού αυτή είναι σταθερά, θα έχουμε αναγκαστικά

$$p(x) = 0 \quad \text{για όλα τα } x>-1.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η υπόθεση ότι $y_1(x)=(1+x)^2$, $x>-1$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης συνεπάγεται ότι

$$q(x) = -\frac{2}{(1+x)^2},\ x>-1.$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωσή μας γίνεται

$$(1+x)^2y''-2y = (1+x)^3,\ x>-1.$$

Θέτοντας $t=\log(1+x)$ για $x>-1$, έχουμε

$$(1+x)y' = \frac{dy}{dt} \quad \text{και} \quad (1+x)^2y'' = -\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}$$

για όλα τα $x>-1$ και επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y = e^{3t},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Οι λύσεις της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t},\quad t\in\mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Άρα, όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1(1+x)^2+c_2\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}(1+x)^3,\ x>-1\ \ (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-14. *Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού* $y=ue^{-(x^2+x)/2}$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+(2x+1)y'+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)y = 0,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$y=ue^{-(x^2+x)/2},$$

$$y' = \left[u'-\left(x+\frac{1}{2}\right)u\right]e^{-(x^2+x)/2},$$

$$y'' = \left[u''-(2x+1)u'+\left(x^2+x-\frac{3}{4}\right)u\right]e^{-(x^2+x)/2}.$$

Έτσι, η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$u''-u = 0,$$

της οποίας όλες οι λύσεις είναι

$$u(x) = c_1e^x+c_2e^{-x},\ x\in \mathbf{R}\quad (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Άρα, όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσής μας δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{(x-x^2)/2}+c_2e^{-(3x+x^2)/2},\ x\in \mathbf{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-15. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(E_1)\qquad \left(1-\frac{1}{x}\right)y'' + \left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)y' - \frac{1}{x^4}y = \frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3},\ x>1.$$

Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $t=1/x$ *μετασχηματίζει την* (E_1) *σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση* (E_2). *Να βρεθεί μια λύση* y_μ *της* (E_2) *της μορφής* $y_\mu(t)=t^m$, $0<t<1$ (m *ακέραιος*). *Ας είναι* (E_3) *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της* (E_2). *Να βρεθούν δύο λύσεις* y_1 *και* y_2 της (E_3) *των μορφών* $y_1(t)=\alpha t+\beta$, $0<t<1$ *και* $y_2(t)=e^{\gamma t}$, $0<t<1$ (α, β, γ *σταθερές*). *Τέλος, να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης* (E_1).

Έχουμε για κάθε $x>1$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

και έτσι, η (E_1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(E_2) \qquad t^3(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+t^4\frac{dy}{dt}-t^3y = 2-2t-2t^2,\ 0<t<1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $y_\mu(t) = t^m$, $0<t<1$ (m ακέραιος) είναι μια λύση της (E_2) αν και μόνο αν $m=-1$. Άρα, είναι

$$y_\mu(t) = \frac{1}{t},\ 0<t<1.$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της (E_3) αν και μόνο αν $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\gamma=1$. Άρα, δύο λύσεις της (E_3) είναι οι

$$y_1(t) = t,\ 0<t<1 \ \text{ και } \ y_2(t) = e^t,\ 0<t<1.$$

Αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(t) = \det\begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t-1)e^t < 0 \quad \text{για } \ 0<t<1.$$

Έτσι, οι λύσεις της (E_2) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(t) = c_1t+c_2e^t+\frac{1}{t},\ \ 0<t<1$$

και επομένως οι λύσεις της (E_1) είναι

$$y(x) = \frac{c_1}{x}+c_2e^{1/x}+x,\ \ x>1,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-16. *Με τη βοήθεια της αντικατάστασης* $y = ze^{x^2}$, *να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''-4xy'+(4x^2-1)y = e^{x^2}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$y' = (z'+2xz)e^{x^2}$$

και

$$y'' = \left[z''+4xz'+(2+4x^2)z\right]e^{x^2}$$

και έτσι η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z''+z = 1.$$

Οι λύσεις αυτής δίνονται από τον τύπο

$$z(x) = c_1\cos x+c_2\sin x+1,\ \ x\in\mathbb{R},$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Άρα, όλες οι λύσεις της αρχικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x) = (c_1\cos x+c_2\sin x+1)e^{x^2},\ \ x\in\mathbb{R}\ \ (c_1,\ c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-17. *Να επιλυθεί η ομογενής διαφορική εξίσωση*

$$y^{(5)}-y'-\frac{4}{x}y=0\,,\quad x>0$$

με τις αντικαταστάσεις $y=xz$, $z^{(4)}-z=w$.

Ας ονομάσουμε (E) τη διαφορική εξίσωσή μας. Κάνουμε την αντικατάσταση $y=zx$ για $x>0$. Τότε έχουμε για όλα τα $x>0$

$$y'=xz'+z \quad \text{και} \quad y^{(5)}=xz^{(5)}+5z^{(4)}.$$

Έτσι, η (E) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$xz^{(5)}+5z^{(4)}-xz'-5z=0,$$

η οποία γράφεται ως

$$x\left[z^{(4)}-z\right]'+5\left[z^{(4)}-z\right]=0.$$

Με την αντικατάσταση $z^{(4)}-z=w$, η τελευταία διαφορική εξίσωση γίνεται

$$xw'+5w=0,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$w(x)=c/x^5\,,\quad x>0,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

(E*) $$z^{(4)}-z=c/x^5\,,\quad x>0.$$

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση της (E*) έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$z_1(x)=e^x,\ z_2(x)=e^{-x},\ z_3(x)=\cos x,\ z_4(x)=\sin x \quad \text{για } x>0.$$

Τώρα, για κάθε $x>0$, έχουμε

$$W(x)=\det\begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & z_3(x) & z_4(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & z_3'(x) & z_4'(x) \\ z_1''(x) & z_2''(x) & z_3''(x) & z_4''(x) \\ z_1'''(x) & z_2'''(x) & z_3'''(x) & z_4'''(x) \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix}=-8,$$

$$W_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ 0 & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ 0 & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ 1 & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -2e^{-x},$$

$$W_2(x) = \det\begin{pmatrix} e^{x} & 0 & \cos x & \sin x \\ e^{x} & 0 & -\sin x & \cos x \\ e^{x} & 0 & -\cos x & -\sin x \\ e^{x} & 1 & \sin x & -\cos x \end{pmatrix} = 2e^{x},$$

$$W_3(x) = \det\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} & 0 & \sin x \\ e^{x} & -e^{-x} & 0 & \cos x \\ e^{x} & e^{-x} & 0 & -\sin x \\ e^{x} & -e^{-x} & 1 & -\cos x \end{pmatrix} = -4\sin x,$$

$$W_4(x) = \det\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} & \cos x & 0 \\ e^{x} & -e^{-x} & -\sin x & 0 \\ e^{x} & e^{-x} & -\cos x & 0 \\ e^{x} & -e^{-x} & \sin x & 1 \end{pmatrix} = 4\cos x.$$

'Αρα, μια μερική λύση της (Ε*) είναι για $x>0$

$$z_\mu(x) = \sum_{k=1}^{4} z_k(x) \int_1^x \frac{W_k(t)}{W(t)} \frac{c}{t^5}\, dt$$

$$= \frac{c}{4} e^{x} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5} dt - \frac{c}{4} e^{-x} \int_1^x \frac{e^{t}}{t^5} dt + \frac{c}{2} \cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5} dt - \frac{c}{2} \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5} dt.$$

'Ετσι, όλες οι λύσεις της (Ε) θα δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x\left[c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+c_5\left(e^{x} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^5} dt - e^{-x} \int_1^x \frac{e^{t}}{t^5} dt + 2\cos x \int_1^x \frac{\sin t}{t^5} dt - 2\sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t^5} dt \right)\right]$$

για $x>0$, όπου c_i $(i=1, \ldots, 5)$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Β-18. *Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις*

$$y_1(x) = e^{-x^2/2}, x > 0 \quad \textit{και} \quad y_2(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt\,,\, x > 0$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+xy'+y = 0\,,\; x > 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+xy'+y = 0\,;\; y(1)=1/\sqrt{e},\, y'(1)=-1/\sqrt{e}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι y_1, y_2 είναι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{-x^2/2} & e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt \\ -xe^{-x^2/2} & -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt+1 \end{pmatrix} = e^{-x^2/2} \neq 0$$

για όλα τα $x > 0$. 'Αρα, $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. Παρατηρούμε ότι $y_1(1)=1/\sqrt{e}$ και $y_1'(1)=-1/\sqrt{e}$. 'Αρα, η y_1 είναι η (μοναδική) λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

Β-19. *Με τον μετασχηματισμό* $x = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, *να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y = 0\,,\, x \in \mathbb{R}\,.$$

'Εχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\,,\;\text{ήτοι}\;\; (1+x^2)y' = 2\,\frac{dy}{dt}$$

και

$$y''\equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+x^2}\frac{dy}{dt}\right) = -\,\frac{4x}{(1+x^2)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y}{dt^2}\,,$$

ήτοι

$$(1+x^2)^2y'' = -4x\,\frac{dy}{dt} + 4\,\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

'Ετσι, η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\,,$$

η οποία έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις cost, $t \in \mathbb{R}$ και sint, $t \in \mathbb{R}$. Τώρα, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις

$$y(x) = \cos(2\mathrm{Artg}x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin(2\mathrm{Artg}x) = \frac{2x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1\frac{1-x^2}{1+x^2} + c_2\frac{2x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

B-20. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\omega^2 y = A\cos\omega x,\ x\geq 0,$$

όπου ω *και* A *είναι θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση* y *αυτής είναι*

$$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = \infty.$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Ας ονομάσουμε (E) τη διαφορική μας εξίσωση και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση αυτής. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0) είναι οι

$$y_1(x) = \cos\omega x,\ x\geq 0 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin\omega x,\ x\geq 0.$$

'Εχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = \omega > 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin\omega x \\ 1 & \omega\cos\omega x \end{pmatrix} = -\sin\omega x,$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\omega x & 0 \\ -\omega\sin\omega x & 1 \end{pmatrix} = \cos\omega x.$$

'Ετσι, μια μερική λύση της (E) είναι για $x\geq 0$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}A\cos\omega t\,dt$$

$$= -\frac{A}{\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin\omega t\cos\omega t\,dt + \frac{A}{\omega}\sin\omega x\int_0^x \cos^2\omega t\,dt$$

$$= -\frac{A}{2\omega}\cos\omega x\int_0^x \sin 2\omega t dt + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\int_0^x (\cos 2\omega t+1)dt$$
$$= \frac{A}{2\omega}\cos\omega x\left[\frac{1}{2\omega}(\cos 2\omega x-1)\right] + \frac{A}{2\omega}\sin\omega x\left(\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega x+x\right).$$

Τελικά, βρίσκουμε

$$y_\mu(x) = \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0.$$

Όλες, λοιπόν, οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y = c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x+\frac{A}{2\omega}x\sin\omega x,\ x\geq 0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Έτσι, για μια τυχούσα λύση y, έχουμε για όλα τα $\nu=1,2,\ldots$

$$\left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| = \left|c_2(-1)^{\nu-1}+\frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1)(-1)^{\nu-1}\right|$$
$$\geq -|c_2| + \frac{A\pi}{4\omega^2}(2\nu-1),$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{2\omega}\right)\right| = \infty.$$

Άρα, για κάθε λύση y της (Ε) ισχύει

$$\limsup_{x\to\infty}|y(x)| = \infty.$$

Τέλος, για τη λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0)=0$, $y_0'(0)=1$, βρίσκουμε $c_1=0$ και $c_2=1/\omega$ και άρα είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + \frac{A}{2\omega}x\sin\omega x = \frac{1}{\omega}\left(1+\frac{A}{2}x\right)\sin\omega x \quad \text{για } x\geq 0.$$

Β-21. *Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+a_1y'+a_0y = b(x),\ x\geq 0,$$

όπου a_1, a_0 *είναι σταθερές και* b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[0,\infty)$. *Ας είναι* r_1, r_2 *οι ρίζες του πολυωνύμου* $r^2+a_1r+a_0$ με $r_1 \neq r_2$ *και ας υποθέσουμε ότι* $\mathrm{Re}r_1<0$, $\mathrm{Re}r_2<0$. *Να αποδειχθεί ότι: Αν η* b *είναι φραγμένη, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.*

Ας είναι $r_1=\alpha_1+i\beta_1$, $r_2=\alpha_2+i\beta_2$, όπου α_1, β_1, α_2, β_2 είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$ και $(\alpha_1,\beta_1)\neq(\alpha_2,\beta_2)$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = e^{r_1x} = e^{\alpha_1x}(\cos\beta_1x+i\sin\beta_1x),\ x\geq 0\ ;$$

$$y_2(x) = e^{r_2x} = e^{\alpha_2x}(\cos\beta_2x + i\sin\beta_2x),\ x\geq 0\ .$$

Επειδή $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$, θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} y_1(x) = \lim_{x\to\infty} y_2(x) = 0$$

και άρα όλες οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$ και επομένως είναι φραγμένες. Αρκεί, λοιπόν, να διαπιστωθεί ότι υπάρχει μια φραγμένη μερική λύση, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση b είναι φραγμένη. 'Έχουμε για $x\geq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{pmatrix} = (r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0,$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{r_2x} \\ 1 & r_2e^{r_2x} \end{pmatrix} = -e^{r_2x}\ ,$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & 0 \\ r_1e^{r_1x} & 1 \end{pmatrix} = e^{r_1x}\ .$$

'Ετσι, μια μερική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι για $x\geq 0$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,b(t)dt + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,b(t)dt$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2}\,e^{r_1x}\int_0^x e^{-r_1t}\,b(t)dt + \frac{1}{r_2-r_1}\,e^{r_2x}\int_0^x e^{-r_2t}\,b(t)dt.$$

Ας υποθέσουμε ότι η b είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια σταθερά $K>0$ έτσι ώστε $|b(x)|\leq K$ για όλα τα $x\geq 0$. 'Ετσι, για κάθε $x\geq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|r_1-r_2||y_\mu(x)| &\leq |e^{r_1x}|\int_0^x |e^{-r_1t}|\,|b(t)|dt + |e^{r_2x}|\int_0^x |e^{-r_2t}|\,|b(t)|dt \\
&= e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\,|b(t)|dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\,|b(t)|dt \\
&\leq K\left(e^{\alpha_1x}\int_0^x e^{-\alpha_1t}\,dt + e^{\alpha_2x}\int_0^x e^{-\alpha_2t}\,dt\right) \\
&= K\left[e^{\alpha_1x}\frac{1}{-\alpha_1}\left(e^{-\alpha_1x}-1\right) + e^{\alpha_2x}\frac{1}{-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2x}-1\right)\right] \\
&= K\left[\left(\frac{1}{-\alpha_1}+\frac{1}{-\alpha_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_1}e^{\alpha_1x}+\frac{1}{\alpha_2}e^{\alpha_2x}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$< K\left(\frac{1}{-\alpha_1}+\frac{1}{-\alpha_2}\right)$$

και άρα η μερική λύση y_μείναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

Β-22. *Αν* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων και* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *είναι ένα σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, να αποδειχθεί ότι*

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = cW(y_1, \ldots, y_n),$$

όπου c είναι μια σταθερά.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωσή μας είναι

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y = 0,$$

όπου a_i $(i=0, 1, \ldots, n-1,n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και $a_n(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Αφού $\{y_1, \ldots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων, θα ισχύει

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0.$$

Τώρα, με τη βοήθεια του τύπου του Liouville, έχουμε για όλα τα $x\in I$

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\,dt\right]$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)}\left\{W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\,dt\right]\right\}$$

$$= \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0)}{W(y_1, \ldots, y_n)(x_0)} W(y_1, \ldots, y_n)(x).$$

Β-23. (i) *Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$(*) \qquad y''+py'+qy = 0,$$

όπου p, q *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *και η* p *έχει συνεχή παράγωγο στο* I. *Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση (όπου* $x_0\in I$)

$$y(x) = u(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right], x\in I$$

μετασχηματίζει την (*) στην εξίσωση

$$(**) \qquad u''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)u = 0.$$

Ακόμα, αν $\{u_1,u_2\}$ *είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της* (**), *τότε οι συναρτήσεις*

$$y_i(x) = u_i(x)\,\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right],\ x\in I \quad (i=1,2)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (*).

(ii) *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y''+(2x+1)y'+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)y = 0,\ x\in[0,1].$$

(i) Για κάθε $x\in I$, έχουμε

$$y'(x) = \left[u'(x)-\frac{1}{2}p(x)u(x)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right]$$

και

$$y''(x) = \left\{u''(x)-p(x)u'(x)+\left[-\frac{1}{2}p'(x)+\frac{1}{4}p^2(x)\right]u(x)\right\}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right].$$

Έτσι, μετά από τις πράξεις, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η δοθείσα αντικατάσταση μετασχηματίζει την (*) στην (**). Ας είναι, τώρα, $\{u_1, u_2\}$ένα βασικό σύνολο λύσεων της (**). Τότε οι y_1,y_2 είναι λύσεις της (*). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· ας υποθέσουμε ότι $c_1y_1+c_2y_2=0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Αυτό συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1=c_2=0$, αφού οι u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι, $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (*).

(ii) Η αντικατάσταση

$$y(x) = u(x)\,\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}(2t+1)dt\right] = u(x)\,e^{-(x^2+x)/2},\ x\in[0,1]$$

μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση στην

$$u''+\left[\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{4}(2x+1)^2\right]u = 0,$$

δηλαδή στην εξίσωση

$$u''-u = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$u_1(x) = e^{x},\ x\in[0,1] \ \text{ και } \ u_2(x) = e^{-x},\ x\in[0,1].$$

Έτσι, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=u_1(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{(x-x^2)/2} \text{ και } y_2(x)=u_2(x)e^{-(x^2+x)/2}=e^{-(x^2+3x)/2} \text{ για } x\in[0,1]$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της διαφορικής μας εξίσωσης και άρα όλες οι λύσεις της δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{(x-x^2)/2}+c_2e^{-(x^2+3x)/2},\ x\in[0,1],$$

όπου οι c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-24. *Ας είναι* y_1 *και* y_2 *οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y = 0,\ x>0$$

(όπου α *σταθερά) με*

$$y_1(1)=1,\ y_1'(1)=0;\ y_2(1)=0,\ y_2'(1)=1.$$

Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.

Έχουμε

$$W(y_1, y_2)(1) = \det\begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Στη συνέχεια, με χρήση του τύπου του Liouville, παίρνουμε για κάθε $x>0$

$$W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(1)\exp\left(-\int_1^x \frac{t}{t^2}\,dt\right) = \exp\left(-\int_1^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}.$$

B-25. *Ας είναι* f *μια συνεχής συνάρτηση στο* $(0,\infty)$. *Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+\frac{1}{4x^2}y = f(x)\cos x,\ x>0.$$

Ας συμβολίσουμε με (E) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση αυτής. Η (E_0) μπορεί να γραφεί ως

$$4x^2y''+y = 0.$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση Euler, η οποία με την αντικατάσταση $t=\log x$, $x>0$ μετασχηματίζεται στην

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι οι $e^{t/2}$, $t \in \mathbb{R}$ και $te^{t/2}$, $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{\log x/2}=\sqrt{x},\ x>0 \text{ και } y_2(x)=\log x\, e^{\log x/2}=\sqrt{x}\log x,\ x>0$$

συνιστούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Τώρα, έχουμε για κάθε $x>0$

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x}\log x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x+\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = 1,$$

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x}\log x \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x+\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} = -\sqrt{x}\log x,$$

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{x}.$$

Έτσι, μια μερική λύση y_μ της (E) είναι

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)\cos t\, dt$$

$$= -\sqrt{x}\int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt + \sqrt{x}\log x\int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt$$

για $x>0$. Τέλος, όλες οι λύσεις της (E) δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = \sqrt{x}\left[c_1-\int_1^x f(t)\sqrt{t}\log t\cos t\, dt\right] + \sqrt{x}\log x\left[c_2+\int_1^x f(t)\sqrt{t}\cos t\, dt\right],\ x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-26. *Ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$y''+y = b(x),\ x\geq 1,$$

όπου b *είναι μια συνεχής συνάρτηση στο* $[1,\infty)$. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Μια μερική λύση είναι*

$$y_\mu(x) = \int_1^x \sin(x-t)b(t)dt,\ x\geq 1.$$

(ii) *Αν* $\int_1^{\infty} |b(x)|dx < \infty$, *τότε κάθε λύση είναι φραγμένη.*

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = \cos x,\ x\geq 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin x,\ x\geq 1.$$

Η ορίζουσα Wronski αυτών είναι

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1,\ x\geq 1.$$

Βρίσκουμε

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{pmatrix} = -\sin x,\ x\geq 1$$

και

$$W_2(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{pmatrix} = \cos x,\ x\geq 1.$$

Έτσι, μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} y_\mu(x) &= y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, b(t)\, dt \\ &= \cos x\int_1^x (-\sin t)b(t)dt + \sin x\int_1^x \cos t\, b(t)\, dt \\ &= \int_1^x (-\cos x\sin t+\sin x\cos t)b(t)\, dt = \int_1^x \sin(x-t)b(t)\, dt,\ x\geq 1. \end{aligned}$$

Αν τώρα y είναι μια τυχούσα λύση της μη ομογενούς εξίσωσης, τότε θα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε $y = c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$ και άρα θα έχουμε για κάθε $x\geq 1$

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |c_1||\cos x|+|c_2||\sin x|+\int_1^x |\sin(x-t)||b(t)|dt \\ &\leq |c_1|+|c_2|+\int_1^x |b(t)|dt \leq |c_1|+|c_2|+\int_1^{\infty} |b(t)|dt. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν ισχύει $\int_1^{\infty} |b(x)|dx < \infty$, τότε όλες οι λύσεις είναι φραγμένες.

Β-27. *Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει τις λύσεις*

$$y_1(x) = 1+e^{x^2},\ y_2(x) = 1+xe^{x^2} \quad \text{και} \quad y_3(x) = (x+1)e^{x^2}+1 \quad \text{για} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση. Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 1,\ y'(0)=1.$$

Ας καλέσουμε (Ε) την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση. Οι συναρτήσεις

$$Y_1(x) = y_3(x)-y_1(x) = xe^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

και

$$Y_2(x) = y_3(x)-y_2(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

είναι λύσεις της (E_0). Οι Y_1, Y_2 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} xe^{x^2} & e^{x^2} \\ (1+2x^2)e^{x^2} & 2xe^{x^2} \end{pmatrix} = -e^{2x^2} \neq 0.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της (Ε) δίνονται από τον τύπο $y=c_1Y_1+c_2Y_2+y_1$, δηλαδή

$$y(x) = (c_1x+c_2+1)e^{x^2}+1,\ x\in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τέλος, παρατηρούμε ότι $y_2(0)=y_2'(0)=1$. 'Αρα, η y_2 είναι η λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Β-28. *Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση*

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y = 0,\ x\in (0,\pi),$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\alpha x),\ x\in (0,\pi)$ *(α σταθερά).*

Για κάθε $x\in (0,\pi)$ έχουμε

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin(\alpha x),$$
$$y_1'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin(\alpha x)+\alpha x^{-1/2}\cos(\alpha x),$$
$$y_1''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2}\sin(\alpha x)-\alpha x^{-3/2}\cos(\alpha x)-\alpha^2x^{-1/2}\sin(\alpha x).$$

Με την αντικατάσταση στην εξίσωση, βρίσκουμε ότι η y_1 είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$(1-\alpha^2)x^{3/2}\sin(\alpha x) = 0 \quad \text{για κάθε } x\in (0,\pi).$$

Δηλαδή, η y_1 είναι μια λύση τότε και μόνον τότε αν $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$. Επιλέγουμε $\alpha=1$ και έχουμε τη μερική λύση

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin x,\ x\in (0,\pi).$$

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^{-1/2}\sin x \quad \text{για } x\in (0,\pi).$$

Τότε για όλα τα $x\in (0,\pi)$ είναι

$$y'(x) = u'(x)x^{-1/2}\sin x + u(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sin x + x^{-1/2}\cos x\right),$$

$$y''(x) = u''(x)x^{-1/2}\sin x + u'(x)\left(-x^{-3/2}\sin x + 2x^{-1/2}\cos x\right)$$
$$+u(x)\left(\frac{3}{4}x^{-5/2}\sin x - x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\sin x\right).$$

Έτσι, μετά από τις πράξεις, η εξίσωσή μας γίνεται

$$(\sin x)u'' + 2(\cos x)u' = 0.$$

Θέτοντας $u'=v$, καταλήγουμε στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$(\sin x)v' + 2(\cos x)v = 0,$$

η οποία έχει τη λύση

$$v_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in (0,\pi).$$

Τότε η συνάρτηση

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{\pi/2}^{x} v_1(t)dt = x^{-1/2}\sin x \int_{\pi/2}^{x} \frac{dt}{\sin^2 t} = -x^{-1/2}\cos x, \ x \in (0,\pi)$$

είναι μια λύση της εξίσωσής μας τέτοια ώστε το $\{y_1, y_2\}$ να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων. Έτσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$y(x) = x^{-1/2}(c_1\sin x + c_2\cos x), \ x \in (0,\pi),$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

B-29. *Ας είναι* f *και* g *δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I. *Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Αν οι* f *και* g *είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x \in I$.

(ii) *Αν* $W(f,g)(x) \neq 0$ *για κάποιο* $x \in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

(iii) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x \in I$, *τότε οι* f, g *δεν είναι αναγκαστικά γραμμικά εξαρτημένες. (Αντιπαράδειγμα:* $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *και* $g(x)=x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.)

(iv) *Αν* $W(f,g)(x)=0$ *για κάθε* $x \in I$ *και* $g(x) \neq 0$ *για όλα τα* $x \in I$, *τότε οι* f, g *είναι γραμμικά εξαρτημένες.*

(i) Ας υποθέσουμε ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, όχι και οι δύο μηδέν, έτσι ώστε $c_1 f + c_2 g = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_1 \neq 0$. Τότε, θέτοντας $\lambda = -c_2/c_1$, έχουμε $f = \lambda g$. Έτσι, παίρνουμε

$$W(f,g) = \det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda g & g \\ \lambda g' & g' \end{pmatrix} = 0.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x_0) \neq 0$ για κάποιο $x_0 \in I$. Έστω ότι $c_1 f + c_2 g = 0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές. Τότε θα είναι και $c_1 f + c_2 g = 0$. Έτσι, έχουμε

$$c_1 f(x_0) + c_2 g(x_0) = 0,\ c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0) = 0.$$

Το ομογενές αυτό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα έχει ορίζουσα την $W(f,g)(x_0)$ που δεν είναι μηδέν και επομένως έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή αναγκαστικά είναι $c_1 = c_2 = 0$. Αυτό αποδεικνύει την γραμμική ανεξαρτησία των f, g. [Ας σημειωθεί ότι το συμπέρασμά μας μπορεί να προκύψει από το (i).]

(iii) Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = x|x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε

$$W(f,g)(x) = \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{pmatrix} = 0 \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Από την άλλη μεριά, οι f, g είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι $c_1 f + c_2 g = 0$, όπου c_1, c_2 είναι σταθερές, τότε (για $x=1$ και για $x=-1$) έχουμε

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ και } c_1 - c_2 = 0,$$

που συνεπάγεται ότι αναγκαστικά $c_1 = c_2 = 0$.

(iv) Ας υποθέσουμε ότι $W(f,g)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ και ότι $g(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Τότε έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = -\frac{W(f,g)}{g^2} = 0$$

και άρα υπάρχει μια σταθερά c έτσι ώστε $f/g = c$. Επομένως, είναι $f - cg = 0$, που σημαίνει ότι οι f, g είναι γραμμικά εξαρτημένες.

B-30. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$y'' - y' - 2y = 4e^{-x};\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta,$$

όπου α, β *είναι σταθερές. Ακόμα, να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα* α, β *ώστε η λύση να είναι φραγμένη στο* $[0,\infty)$.

Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση έχει ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις

$$y_1(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \text{ και } y_2(x) = e^{2x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής μας εξίσωσης είναι η

$$y_\mu(x) = -\frac{4}{3}xe^{-x}, \; x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $y=c_1y_1+c_2y_2+y_\mu$, δηλαδή από τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x}, \; x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τώρα, έχουμε

$$y(0) = c_1+c_2 = \alpha \quad \text{και} \quad y'(0) = -c_1+2c_2-\frac{4}{3} = \beta$$

από όπου προκύπτει $c_1=\frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)$ και $c_2=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)$. Άρα, η λύση y_0 του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y_0(x) = \frac{1}{3}\left(2\alpha-\beta-\frac{4}{3}\right)e^{-x}+\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{4}{3}\right)e^{2x}-\frac{4}{3}xe^{-x}, \; x\in\mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις e^{-x} και xe^{-x} είναι φραγμένες για $x\geq 0$. Επομένως, η λύση y_0 είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ αν και μόνο αν

$$\alpha+\beta+\frac{4}{3} = 0.$$

C. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. **Δεν θα περιληφθούν εδώ Ασκήσεις επί των Εξισώσεων Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre και Bessel, δεδομένου ότι μια διεξοδική μελέτη αυτών έχει γίνει στο Εδάφιο 4 του Κεφαλαίου V του Βιβλίου "*Χρίστος Γ. Φίλος, Μια Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιωάννινα, 1992*". Ο αναγνώστης παροτρύνεται να μελετήσει το Εδάφιο αυτό για μια περαιτέρω εμβάθυνση στο πρόβλημα εύρεσης δυναμοσειρών λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.**

C-1. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$(x^2-2x)y''+5(x-1)y'+3y = 0\ ;\ y(1)=2,\ y'(1)=-1.$$

Έχουμε

$$\frac{5(x-1)}{x^2-2x} = -5(x-1)\frac{1}{1-(x-1)^2} = -5(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-5)(x-1)^{2n+1} \quad \text{για } |x-1|<1$$

και

$$\frac{3}{x^2-2x} = -3\frac{1}{1-(x-1)^2} = -3\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-3)(x-1)^{2n} \quad \text{για } |x-1|<1.$$

Έτσι, το σημείο $x_0=1$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής μας εξίσωσης και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n \quad \text{για } |x-1|<1, \text{ όπου } c_0=2 \text{ και } c_1=-1.$$

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_n ($n=2, 3, \ldots$). Για όλα τα x με $|x-1|<1$, έχουμε

$(x^2-2x)y''(x)+5(x-1)y'(x)+3y =$

$$= \left[(x-1)^2-1\right]\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}+5(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}+5\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n+5\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-1)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n^2+4n+3)c_n\right](x-1)^n$$

και επομένως

$$-(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n^2+4n+3)c_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Έτσι, παίρνουμε

$$c_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}c_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Άρα, έχουμε

$$c_{2n} = \frac{2n+1}{2n}c_{2(n-1)} \quad \text{και} \quad c_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}c_{2(n-1)+1} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

από όπου προκύπτει (αφού $c_0=2$ και $c_1=-1$)

$$c_{2n} = \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)}\cdot 2 \quad \text{και} \quad c_{2n+1} = \frac{4.6\ldots(2n+2)}{3.5\ldots(2n+1)}\cdot(-1) \quad \text{για } n=1, 2, \ldots .$$

Επομένως, για κάθε x με $|x-1|<1$ είναι

$$y(x) = c_0+c_1(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}(x-1)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}(x-1)^{2n+1}$$
$$= 2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)}(x-1)^{2n}\right]-\left[(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4.6\ldots(2n+2)}{3.5\ldots(2n+1)}(x-1)^{2n+1}\right]$$
$$= 2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2^n\,n!}(x-1)^{2n}\right]-\left[(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,(n+1)!}{3.5\ldots(2n+1)}(x-1)^{2n+1}\right]$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^n\,n!}(x-1)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,(n+1)!}{1.3.5\ldots(2n+1)}(x-1)^{2n+1}.$$

Αυτή είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών ορισμένη για $|x-1|<1$, δηλαδή ορισμένη στο διάστημα (0, 2).

C-2. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(1+x^2)y''+2xy'-2y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0=0$.

Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης και οι λύσεις αυτής γύρω από το $x_0=0$ είναι της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{για } |x|<R,$$

για κάποιο R με $0<R\leq\infty$. Οι συντελεστές c_n (n=2, 3, . . .) θα προσδιορισθούν συναρτήσει των c_0 και c_1. Για κάθε x με $|x|<R$, έχουμε

$$(1+x^2)y''(x)+2xy'(x)-2y(x) = (1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n+2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n-2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n+2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n-2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n+2)(n-1)c_n]x^n.$$

Άρα, θα είναι

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n+2)(n-1)c_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

και επομένως

$$c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}c_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Από τον τύπο αυτόν προκύπτει ότι

$$c_{2n} = -\frac{2n-3}{2n-1}c_{2(n-1)} \quad \text{και} \quad c_{2n+1} = -\frac{n-1}{n}c_{2(n-1)+1} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και έτσι βρίσκουμε

$$c_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}c_0 \quad \text{και} \quad c_{2n+1} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Άρα, είναι για $|x|<R$

$$y(x) = c_0+c_1x+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$= c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n}\right]+c_1x = c_0(1+x\text{Artg}x)+c_1x.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις (που ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία)

$$y_1(x) = 1+x\text{Artg}x,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $y=Ay_1+By_2$, δηλαδή τον τύπο

$$y(x) = A(1+x\text{Artg}x)+Bx,\ x\in\mathbb{R},$$

όπου A και B είναι αυθαίρετες σταθερές.

C-3. *Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$(x+1)^2y''+2y'+xy = 0\ ;\ y(0)=2,\ y'(0)=3.$$

Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα είναι της μορφής

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ για } |x|<R \quad (c_0=2,\ c_1=3),$$

για κάποιο R με $0<R\leq\infty$. Για όλα τα x με $|x|<R$, παίρνουμε

$$(x+1)^2y''(x)+2y'(x)+xy(x) =$$

$$= (x^2+2x+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_{n+1}x^n+\left[2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n\right]+2\left[c_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n$$

$$= (2c_2+2c_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+2(n+1)^2c_{n+1}+n(n-1)c_n+c_{n-1}\right]x^n$$

και επομένως

$$2c_2+2c_1 = 0$$

και

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+2(n+1)^2c_{n+1}+n(n-1)c_n+c_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Έτσι, οι συντελεστές c_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ προσδιορίζονται από τους τύπους

$$c_0 = 2\ ,\ \ c_1 = 3\ ,\ \ c_2 = -3$$

και

$$c_{n+2} = -\frac{2(n+1)^2c_{n+1}+n(n-1)c_n+c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Για παράδειγμα, βρίσκουμε

$$c_3 = \frac{11}{3}\ ,\ \ c_4 = -\frac{21}{4}\ ,\ \ c_5 = \frac{149}{20}\ .$$

C-4. *Δίνεται η διαφορική εξίσωση*

$$(*) \qquad y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0,$$

όπου p *είναι μια σταθερά.*

(i) *Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις της* (*) *γύρω από το σημείο* $x_0=0$.

(ii) *Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση* $y=ze^{-x^2/4}$ *μετασχηματίζει την* (*) *στην εξίσωση*

(**) $$z''-xz'+pz=0.$$

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση (**).

(iii) *Να βρεθούν όλες οι λύσεις της* (*).

(i) Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της εξίσωσης (*). Οι λύσεις της (*) γύρω από το $x_0=0$ θα ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία και θα είναι της μορφής

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \text{για } x\in\mathbb{R},$$

όπου $c_0=y(0)$ και $c_1=y'(0)$. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
y''(x)+\left(p+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n-\frac{1}{4}x^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\left(p+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n-\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n\\
&= \left[2c_2+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_0\right]+\left[6c_3+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_1\right]+\\
&\quad +\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_n-\frac{1}{4}c_{n-2}\right]x^n.
\end{aligned}$$

Επομένως, οι συντελεστές c_n ($n=2, 3, \ldots$) προσδιορίζονται, συναρτήσει των c_0 και c_1, από τους τύπους

$$2c_2+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_0=0, \quad 6c_3+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_1=0,$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)c_n-\frac{1}{4}c_{n-2}=0 \quad (n=2, 3, \ldots).$$

(ii) Αν θέσουμε $y=ze^{-x^2/4}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε έχουμε για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

$$y'=\left(z'-\frac{x}{2}z\right)e^{-x^2/4} \quad \text{και} \quad y''=\left[z''-xz'-\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)z\right]e^{-x^2/4}$$

και έτσι, μετά τις πράξεις, βλέπουμε ότι η εξίσωση (*) μετασχηματίζεται στην (**). Παρατηρούμε, τώρα, ότι το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (**) και ότι οι λύσεις αυτής γύρω από αυτό είναι της μορφής

$$z(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \quad \text{για } x\in\mathbb{R}$$

με $d_0=z(0)$ και $d_1=z'(0)$. Για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, είναι

$$z''(x)-xz'(x)+pz(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}+p\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^n + p\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)d_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n d_n x^n + p\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)d_{n+2}+(p-n)d_n]x^n$$

και επομένως οι συντελεστές d_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ πληρούν τον αναγωγικό τύπο

$$(n+2)(n+1)d_{n+2}+(p-n)d_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

ή

$$d_{n+2} = \frac{n-p}{(n+2)(n+1)} d_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Έτσι, έχουμε

$$d_{2n} = \frac{(2n-2)-p}{2n(2n-1)} d_{2(n-1)} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και

$$d_{2n+1} = \frac{(2n-1)-p}{(2n+1)2n} d_{2(n-1)+1} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Από τους τύπους αυτούς προκύπτει ότι

$$d_{2n} = \frac{(0-p)(2-p)\ldots[(2n-2)-p]}{2^n n![1.3\ldots(2n-1)]} d_0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και

$$d_{2n+1} = \frac{(1-p)(3-p)\ldots[(2n-1)-p]}{[3.5\ldots(2n+1)]2^n n!} d_1 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Άρα, είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$z(x) = d_0+d_1x+\sum_{n=1}^{\infty} d_{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty} d_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$= d_0\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-p)(2-p)\ldots[(2n-2)-p]}{2^n n![1.3\ldots(2n-1)]} x^{2n}\right\} + d_1\left\{x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)(3-p)\ldots[(2n-1)-p]}{[3.5\ldots(2n+1)]2^n n!} x^{2n+1}\right\}.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (**) είναι οι

$$z_1(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-p)(2-p)\ldots[(2n-2)-p]}{2^n n![1.3\ldots(2n-1)]} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$z_2(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)(3-p)\ldots[(2n-1)-p]}{[3.5\ldots(2n+1)]2^n n!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = z_1(x)e^{-x^2/4}, \; x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = z_2(x)e^{-x^2/4}, \; x \in \mathbb{R}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (*), όπου οι z_1, z_2 έχουν ορισθεί παραπάνω. Όλες οι λύσεις της (*) δίνονται από τον τύπο $y=C_1y_1+C_2y_2$, όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

C-5. *Να βρεθούν οι έξι πρώτοι όροι της δυναμοσειράς λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών*

$$y''+(\cos x)y = 0\ ;\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$$

Δίνεται ότι

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad \textit{για}\ x\in\mathbb{R}.$$

Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής μας εξίσωσης και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \text{ όπου } c_0=1 \text{ και } c_1=2.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$y(x) = 1+2x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots,$$
$$y''(x) = 2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\ldots,$$
$$\cos x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots\ .$$

Επομένως, είναι για $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y''(x)+(\cos x)y(x) &= 2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\ldots \\ &\quad +\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots\right)\left(1+2x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots\right) \\ &= 2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\ldots+\left[1+2x+\left(c_2-\frac{1}{2}\right)x^2+(c_3-1)x^3+\ldots\right] \\ &= (2c_2+1)+(6c_3+2)x+\left(12c_4+c_2-\frac{1}{2}\right)x^2+(20c_5+c_3-1)x^3+\ldots \end{aligned}$$

και άρα

$$2c_2+1 = 0\ ,\ 6c_3+2 = 0\ ,\ 12c_4+c_2-\frac{1}{2} = 0\ ,\ 20c_5+c_3-1 = 0\ .$$

Έτσι, προκύπτει

$$c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = -\frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{12},\ c_5 = \frac{1}{15}$$

και επομένως

$$y(x) = 1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{15}+\ldots \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

C-6. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$2xy''+y'+xy = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0=0$.

Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο της διαφορικής εξίσωσης. Αν θέσουμε $A_1(x)=1/2$ και $A_0(x)=x^2/2$ για $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι

$$x\cdot 1 = 2x\cdot A_1(x),\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad x^2\cdot x = 2x\cdot A_0(x),\ x\in\mathbb{R}$$

και επομένως $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Η ενδεικτική εξίσωση είναι $\lambda^2-\lambda/2=0$ με ρίζες $\lambda_1=1/2$ και $\lambda_2=0$. Επειδή $\lambda_1-\lambda_2=1/2$ δεν είναι ακέραιος, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης θα είναι οι

$$y_1(x) = |x|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \text{για } x\neq 0, \text{ με } c_0=1$$

και

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \quad \text{για } x\neq 0, \text{ όπου } d_0=1.$$

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_n και d_n $(n=1, 2, \ldots)$. Για κάθε $x>0$, παίρνουμε

$$y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \ ,$$

$$y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^n = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n,$$

$$y_1''(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n+x^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n+x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n$$

$$= x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)c_nx^n$$

και έτσι έχουμε

$2xy_1''(x)+y_1'(x)+xy_1(x) =$

$$= 2x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)c_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)c_nx^n+x^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}n(2n+1)c_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}$$

$$= x^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}n(2n+1)c_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n\right]$$

$$= x^{-1/2}\left\{3c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[n(2n+1)c_n+c_{n-2}]x^n\right\}.$$

Επομένως είναι

$$c_1 = 0 \quad \text{και} \quad n(2n+1)c_n + c_{n-2} = 0 \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Άρα,

$$c_1 = 0 \quad \text{και} \quad c_n = -\frac{1}{n(2n+1)}c_{n-2} \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Έτσι, βρίσκουμε ότι

$$c_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots) \quad \text{και} \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!\, [5.9\ldots(4n+1)]} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και επομένως η λύση y_1 είναι

$$y_1(x) = |x|^{1/2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\, n!\, [5.9\ldots(4n+1)]}x^{2n}\right\} \quad \text{για } x\neq 0.$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε τη λύση y_2. Για κάθε $x>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
2xy_2''(x)+y_2'(x)+xy_2(x) &= 2x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+1} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)d_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}x^n \\
&= d_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(2n+1)d_{n+1}+d_{n-1}]x^n
\end{aligned}$$

και άρα είναι

$$d_1 = 0 \quad \text{και} \quad (n+1)(2n+1)d_{n+1}+d_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots),$$

δηλαδή

$$d_1 = 0 \quad \text{και} \quad d_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(2n+1)}d_{n-1} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Από τους τύπους αυτούς βρίσκουμε

$$d_{2n-1} = 0 \quad \text{και} \quad d_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!\, [3.7\ldots(4n-1)]} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και άρα η λύση y_2 είναι

$$y_2(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\, n!\, [3.7\ldots(4n-1)]}x^{2n} \quad \text{για } x\neq 0.$$

C-7. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy''+y'+xy = 0.$$

Είναι φανερό ότι $x_0=0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο της εξίσωσης. Περαιτέρω, είναι $x\cdot 1=x\cdot A_1(x)$ και $x^2\cdot x=x\cdot A_0(x)$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, όπου

$$A_1(x) = 1,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad A_0(x) = x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, το $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και η ενδεικτική εξίσωση είναι $\lambda^2=0$ με ρίζες $\lambda_1=\lambda_2=0$. Έτσι, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \text{για } x\neq0, \text{ με } c_0=1$$

και

$$y_2(x)=y_1(x)\log|x|+\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \quad \text{για } x\neq0, \text{ με } d_0=0.$$

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_n και d_n $(n=1,2,\ldots)$. Για κάθε $x>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
xy_1''(x)+y_1'(x)+xy_1(x) &= x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n\\
&=c_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)^2c_{n+1}+c_{n-1}]x^n
\end{aligned}$$

και επομένως είναι

$$c_1=0 \quad \text{και} \quad c_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)^2}c_{n-1} \quad (n=1,2,\ldots)$$

ή

$$c_1=0 \quad \text{και} \quad c_n=-\frac{1}{n^2}c_{n-2} \quad (n=2,3,\ldots).$$

Έτσι, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι

$$c_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,\ldots) \quad \text{και} \quad c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

και άρα η λύση y_1 δίνεται από τον τύπο

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \quad \text{για } x\neq0.$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε τη λύση y_2. Για όλα τα $x>0$, έχουμε

$$y_2(x)=y_1(x)\log x+\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^n,$$

$$y_2'(x)=y_1'(x)\log x+\frac{1}{x}y_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1},$$

$$y_2''(x)=y_1''(x)\log x+\frac{2}{x}y_1'(x)-\frac{1}{x^2}y_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-2}$$

και έτσι παίρνουμε

$$xy_2''(x)+y_2'(x)+xy_2(x)=[xy_1''(x)+y_1'(x)+xy_1(x)]\log x+2y_1'(x)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} nd_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n+1}$$

$$= 2y_1'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nd_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}d_{n-1}x^n$$

$$= 2y_1'(x)+d_1+4d_2x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)^2d_{n+1}+d_{n-1}\right]x^n$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty} 2n\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n-1}\right]+d_1+4d_2x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(2n)^2d_{2n}+d_{2(n-1)}\right]x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)^2d_{2n+1}+d_{2(n-1)+1}\right]x^{2n}$$

$$= d_1+(4d_2-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)^2d_{2n+1}+d_{2(n-1)+1}\right]x^{2n}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(2n)^2d_{2n}+d_{2(n-1)}+2.2n\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\right]x^{2n-1}.$$

Άρα, ισχύουν

$$d_1 = 0 \quad \text{και} \quad (2n+1)^2d_{2n+1}+d_{2(n-1)+1} = 0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

και

$$4d_2-1 = 0 \quad \text{και} \quad (2n)^2d_{2n}+d_{2(n-1)}+2.2n\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} = 0 \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Από τους τύπους αυτούς μπορούμε να πάρουμε

$$d_{2n+1} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

και

$$d_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Επομένως, η λύση y_2 είναι

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n} \quad \text{για } x\neq 0.$$

Η λύση y_1 έχει βρεθεί παραπάνω.

C-8. *Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$x^2y''+(x^2-3x)y'+3y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0=0$.

Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο της διαφορικής εξίσωσης. Αν θέσουμε $A_1(x)=-3+x$ και $A_0(x)=3$ για $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$x\cdot(x^2-3x) = x^2\cdot A_1(x), x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad x^2\cdot 3 = x^2\cdot A_0(x), x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και η ενδεικτική εξίσωση είναι $\lambda^2-4\lambda+3=0$ με ρίζες $\lambda_1=3$ και $\lambda_2=1$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι οι

$$y_1(x) = |x|^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{για } x\neq 0, \text{ με } c_0=1$$

και

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log|x|+|x| \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad \text{για } x\neq 0, \text{ με } d_0=1,$$

όπου C είναι μια σταθερά (που μπορεί να είναι και ίση με μηδέν). Θα προσδιορίσουμε πρώτα τους συντελεστές c_n ($n=1, 2, \dots$). Για κάθε $x>0$, έχουμε
$x^2y_1''(x)+(x^2-3x)y_1'(x)+3y_1(x) =$

$$= x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)c_n x^{n+1}+(x^2-3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_n x^{n+2}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)c_n x^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_n x^{n+4}-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_n x^{n+3}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)c_n x^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_n x^{n+4}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)c_n x^{n+3}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)c_{n-1} x^{n+3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(nc_n+c_{n-1})x^{n+3}$$

και άρα

$$nc_n+c_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Από τον τύπο αυτόν παίρνουμε αμέσως (αφού $c_0=1$)

$$c_n = (-1)^n/n! \quad (n=0,1, 2, \dots).$$

Έτσι, η λύση y_1 είναι

$$y_1(x) = |x|^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = |x|^3 e^{-x} \quad \text{για } x\neq 0.$$

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εύρεση της λύσης y_2. Για όλα τα $x>0$ έχουμε

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log x+\sum_{n=0}^{\infty}d_n x^{n+1},$$

$$y_2'(x) = Cy_1'(x)\log x+C\frac{1}{x}y_1(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_n x^n,$$

$$y_2''(x) = Cy_1''(x)\log x+2C\frac{1}{x}y_1'(x)-C\frac{1}{x^2}y_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)d_n x^{n-1}$$

και έτσι παίρνουμε

$$x^2y_2''(x)+(x^2-3x)y_2'(x)+3y_2(x) = C[x^2y_1''(x)+(x^2-3x)y_1'(x)+3y_1(x)]\log x$$
$$+2Cxy_1'(x)+C(x-4)y_1(x)$$

$$+x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)d_nx^{n-1}+(x^2-3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nx^n+3\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+1}$$
$$= C(-x^4+2x^3)e^{-x}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)d_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nx^{n+2}$$
$$-3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nx^{n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+1}$$
$$= -C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+4}+2C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+3}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-2)d_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nx^{n+2}$$
$$= -C\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-4)!}x^n-2C\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-3)!}x^n$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n-3)d_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)d_{n-2}x^n$$
$$= (-d_1+d_0)x^2+(2d_1+2C)x^3$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty}\left\{(n-1)[(n-3)d_{n-1}+d_{n-2}]-C(-1)^n\left[\frac{1}{(n-4)!}+\frac{2}{(n-3)!}\right]\right\}x^n.$$

Επομένως, έχουμε

$$-d_1+d_0 = 0\ ,\ 2d_1+2C = 0$$

και

$$(n-1)[(n-3)d_{n-1}+d_{n-2}]-C(-1)^n\left[\frac{1}{(n-4)!}+\frac{2}{(n-3)!}\right] = 0 \quad (n=4, 5, \ldots),$$

όπου ο συντελεστής d_2 μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Έτσι, επιλέγοντας $d_2=0$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά C και τους συντελεστές d_n ($n=0, 1, 2, \ldots$) από τους τύπους

$$C = -1\ ;\ d_0 = 1\ ,\ d_1 = 1\ ,\ d_2 = 0$$

και

$$d_{n-1} = -\frac{1}{n-3}d_{n-2}-\frac{(-1)^n}{(n-1)(n-3)}\left[\frac{1}{(n-4)!}+\frac{2}{(n-3)!}\right] \quad (n=4, 5, \ldots).$$

C-9. *Δίνεται η διαφορική εξίσωση*

$$x^3y''+xy'-y = 0.$$

(i) *Να αποδειχθεί ότι* $x_0=0$ *είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο.*

(ii) *Να διαπιστωθεί ότι* $y_1(x)=x$, $x>0$ *είναι μια λύση και, στη συνέχεια, να βρεθεί μια λύση* y_2 *στο διάστημα* $(0,\infty)$ *έτσι ώστε* $\{y_1, y_2\}$ *να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων.*

(iii) *Να αποδειχθεί ότι η* y_2 *δεν είναι δυνατόν να είναι της μορφής*

$$y_2(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{για} \quad x>0,$$

όπου α *και* c_n (n=0, 1, 2, . . .) *είναι πραγματικοί αριθμοί (δεν είναι, δηλαδή, η* y_2 *μια σειρά Frobenius).*

(i) Είναι φανερό ότι $x_0=0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο. Επειδή δε οι συναρτήσεις $A_1(x)=x^2/x^3=1/x$ και $A_0(x)=-x^2/x^3=-1/x$ δεν είναι αναλυτικές στο 0, έπεται ότι το $x_0=0$ είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο.

(ii) Αμέσως παρατηρούμε ότι $y_1(x)=x$, $x>0$ είναι μια λύση. Θέτουμε $y=y_1z=xz$ για $x>0$, οπότε η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$x^3(xz''+2z')+x(xz'+z)-xz = 0$$

ή

$$(*) \qquad x^2z''+(2x+1)z' = 0.$$

Με την αντικατάσταση $z'=u$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$x^2u'+(2x+1)u = 0,$$

της οποίας μια λύση είναι η

$$u_1(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} \quad \text{για} \quad x>0.$$

Άρα, η συνάρτηση $z_1(x)=e^{1/x}$, $x>0$ είναι μια λύση της εξίσωσης (*). Έτσι, συμπεραίνομε ότι

$$y_2(x) = xe^{1/x} \quad \text{για } x>0$$

είναι μια (άλλη) λύση της διαφορικής μας εξίσωσης. Επειδή

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} x & xe^{1/x} \\ 1 & (1-1/x)e^{1/x}\end{pmatrix} = -e^{1/x} \neq 0 \quad \text{για κάθε } x>0,$$

έπεται ότι $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων.

(iii) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και c_n (n=0,1, . . .) έτσι ώστε

$$y_2(x) = x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{για } x>0.$$

Τότε θα είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{1-\alpha}e^{1/x} \quad \text{για κάθε } x>0$$

και επομένως θα έχουμε

$$c_0 = \lim_{x\to 0+0}\left(x^{1-\alpha}e^{1/x}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(t^{\alpha-1}e^{t}\right) = \infty,$$

το οποίο είναι ένα άτοπο, και έτσι έχει αποδειχθεί ο ισχυρισμός μας.

C-10. *Δίνεται η διαφορική εξίσωση*

$$xy''+xy'+2y = 0.$$

(i) *Να αποδειχθεί ότι x_0=0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και ότι οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης είναι λ_1=1 και λ_2=0.*

(ii) *Να βρεθεί μια λύση y_1 στο διάστημα $(0,\infty)$ της μορφής*

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \ x>0.$$

(iii) *Να βρεθεί μια λύση y_2 στο διάστημα $(0,\infty)$ γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1, με χρήση της μεθόδου του υποβιβασμού της τάξης της διαφορικής εξίσωσης.*

(i) Το x_0=0 είναι ένα ανώμαλο σημείο. Για $A_1(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ και $A_0(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$xA_1(x) = x\cdot x \quad \text{και} \quad xA_0(x) = x^2\cdot 2 \quad \text{για} \quad x\in\mathbb{R}$$

και άρα x_0=0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Η ενδεικτική εξίσωση είναι $\lambda^2-\lambda=0$ με ρίζες λ_1=1 και λ_2=0.

(ii) Η διαφορική εξίσωση έχει, στο διάστημα $(0,\infty)$, μια λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \ x>0,$$

όπου c_0=1. Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_n (n=1, 2, . . .). Για όλα τα x>0, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
xy_1''(x)+xy_1'(x)+2y_1(x) &= x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2c_{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)c_n+(n+2)c_{n-1}]x^n.
\end{aligned}$$

Άρα, η y_1 είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$n(n+1)c_n = -(n+2)c_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι c_0=1, βρίσκουμε

$$c_n = (-1)^n\frac{n+2}{2n!} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος αυτός για n=0 δίνει c_0=1. Επομένως, είναι

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2(n-1)!}x^n \ \text{για } x>0.$$

(iii) Θέτουμε $y=y_1z$. Τότε η διαφορική μας εξίσωση γίνεται

$$x(y_1z''+2y_1'z'+y_1''z)+x(y_1z'+y_1'z)+2y_1z = 0$$

ή

$$xy_1z''+x(2y_1'+y_1)z'+(xy_1''+xy_1'+2y_1)z = 0$$

ή ακόμα (αφού η y_1 είναι μια λύση)

(*) $$y_1z''+(2y_1'+y_1)z' = 0.$$

Με την αντικατάσταση $z'=u$, παίρνουμε

$$y_1u'+(2y_1'+y_1)u = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τη λύση

$$u_1(x) = \exp\left[-\int \frac{2y_1'(x)+y_1(x)}{y_1(x)}dx\right] = \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)} \quad \text{για } x>0.$$

Τώρα, μια λύση της εξίσωσης (*) είναι η

$$z_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx, \quad x>0.$$

Έτσι, λοιπόν, η διαφορική μας εξίσωση έχει ως μια λύση την

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx \quad \text{για } x>0.$$

Οι λύσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αφού

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_1(x)\int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx \\ y_1'(x) & y_1'(x)\int \frac{e^{-x}}{y_1^2(x)}dx+\frac{e^{-x}}{y_1(x)} \end{pmatrix} = e^{-x} \neq 0 \quad \text{για } x>0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προτεινόμενες για λύση

1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x^2+x^3y+y)dx+(8y^3+4xy^4+x)dy = 0,$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\varrho(x, y)=\varphi(xy)$.

2. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad y'+py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά μ έτσι ώστε $p(x)\geq\mu$ για όλα τα $x\geq 0$ και ότι $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)=0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης (Ε) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

3. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}+e^x\sec y-\operatorname{tg} y = 0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\varrho(x,y)=e^{-\alpha x}\cos y$ (α σταθερά).

4. Να επιλυθούν τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $\left[x(1+y)-x^2\right]y' = (1+y)^2,\ y(1)=-1.$

(ii) $(x+1)y'-y\log y = (x+1)^2y,\ y(0)=2.$

(iii) $y'+2y = q(x),\ y(0)=1,$ όπου $q(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$

(iv) $e^{x+y}+3x^2y^2+\left(2yx^3+e^{x+y}\right)y' = 0,\ y(1)=0.$

(v) $\left[y^{-3}\cos(x-y)+y\right]dx+[(4x-y^{-3}\cos(x-y))dy = 0,\ y(1)=1.$

5. Ας θεωρήσουμε την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad y' = ay + b,$$

όπου a και b είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Αν $a(x) \leq m$ για όλα τα $x \geq 0$, όπου m είναι μια αρνητική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε κάθε λύση της (E) είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$.

(ii) Αν $a(x) \geq k$ για όλα τα $x \geq 0$, όπου k είναι μια θετική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση της (E) που είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$ και η λύση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = -\int_x^\infty b(s)\exp\left[\int_s^x a(t)dt\right]ds, \quad x \geq 0.$$

(iii) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = A$ και $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = B$, όπου A και B είναι σταθερές με $A< 0$, τότε το όριο για $x\to\infty$ κάθε λύσης της (E) είναι ίσο με $-B/A$.

(iv) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = A$ και $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = B$, όπου A και B είναι σταθερές με $A > 0$, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση της (E) τέτοια ώστε το όριό της για $x\to\infty$ να είναι πεπερασμένο.

6. Ας θεωρήσουμε την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x}b(x), \quad x > 0,$$

όπου b είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Να βρεθούν συνθήκες ώστε το όριο για $x \to 0+0$ κάθε λύσης της (E) να είναι πεπερασμένο.

7. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$y''+a_1y'+a_0y = 0,$$

όπου a_0, a_1 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I, και ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Ας είναι ακόμα y_1 μια λύση της (E_0) με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια λύση y_2 της (E_0) τέτοια ώστε $W(y_1, y_2)(x_0)=1$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η y_2, συναρτήσει της y_1, από τον τύπο

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^x a_1(t)dt\right], \quad x\in I.$$

8. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(3x-x^2)y'+(1-x-e^{2x})y = 0, \quad x>0,$$

αφού βρεθούν λύσεις αυτής της μορφής $y(x) = (1/x)\, e^{ag(x)}$, $x>0$, όπου a είναι σταθερά και

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\ ,\ x>0.$$

9. Δίνεται η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y' = Py^2+Qy+R,$$

όπου P είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα I με $P(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$ και Q, R είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I. Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $y=-\frac{z'}{Pz}$ μετασχηματίζει την εξίσωση αυτή στη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$z''-[Q+(P'/P)]z'+PRz = 0.$$

Εφαρμογή : Να επιλυθούν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

(i) $xy' = x^2y^2-y+1,\ x>0.$

(ii) $x^2y' = x^4y^2+(3x^2-2x)y+2,\ x>0.$

(iii) $(\cos x)y' = (\cos^2 x)y^2+(\sin x-2\cos x)y+5,\ -\pi/2<x<\pi/2.$

10. Ας είναι $\{y_1, y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το $(-\infty,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Παραγωγίστε τη συνάρτηση y_1/y_2 και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Rolle.

11. Ας είναι a, b και c θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $ay''+by'+cy=0$ τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

12. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^4y''+2x^3y'+y = \cos(1/x)\ ,\ x>1/\pi\ ,$$

αφού διαπιστωθεί ότι η $y_1(x)=\sin(1/x)$, $x>1/\pi$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής εξίσωσης.

13. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'''-y''-y'+y = 0$$

και ας είναι y η λύση αυτής που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta,\ y''(0)=\gamma.$$

Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α, β, γ ώστε να είναι $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$.

14. Ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+a_1y'+a_0y = b,$$

όπου a_0, a_1 είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας είναι y_0 η λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0)=0$, $y_0'(0)=1$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x y_0(x-t)b(t)dt, \ x\geq 0$$

είναι μια λύση της (E). Ειδικά, αν η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ έχει μια διπλή ρίζα m, τότε είναι

$$\tilde{y}(x) = e^{mx}\int_0^x (x-t)e^{-mt}\, b(t)dt, \ x\geq 0.$$

15. Ας είναι (y_1, y_2) η λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (όπου $\varepsilon\neq 0$ σταθερά)

$$y_1' = y_1+\varepsilon y_2\,, \quad y_2' = \varepsilon y_1+y_2$$

και (z_1, z_2) η λύση του διαφορικού συστήματος

$$z_1' = z_1 \quad \text{και} \quad z_2' = z_2$$

με

$$y_1(0) = z_1(0) = 1 \quad \text{και} \quad y_2(0) = z_2(0) = -1.$$

Να αποδειχθεί ότι $(y_1, y_2)\to(z_1, z_2)$ όταν $\varepsilon\to 0$.

16. Να επιλυθούν οι ακόλουθες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη βοήθεια των σημειούμενων μετασχηματισμών:

(i) $x(1+x^2)^2y''-(1-3x^2)(1+x^2)y'-8x^3y = 4x^3(1+x^2)$, $x>0$; $t=1+x^2$.

(ii) $x(x+1)^2y''+(3x+2)(x+1)y'+y = \log(x+1)$, $x>0$; $z=xy$.

(iii) $(1+x^2)xy''+2(1+x)^2y'+4y = 0$, $x>0$; $z=y+xy'$.

17. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+a_1y'+a_0y = b,$$

όπου a_1, a_0 είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ έχει δύο διακεκριμμένες ρίζες λ_1, λ_2 τέτοιες ώστε $\mathrm{Re}\lambda_1<0$, $\mathrm{Re}\lambda_2<0$. Να αποδειχθεί ότι, αν $\lim_{x\to\infty} b(x)=0$, τότε όλες οι λύσεις της (E) τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$.

18. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{1+x^2}\, y = 1 + x^2.$$

19. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ας είναι φ_n μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + n^2y = 0$ που πληροί τις συνοριακές συνθήκες $\varphi_n(0) = \varphi_n(2\pi)$, $\varphi'_n(0) = \varphi'_n(2\pi)$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \text{για} \quad n \neq m.$$

[ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $(n^2 - m^2)\varphi_n\varphi_m = \varphi_n\varphi''_m - \varphi_m\varphi''_n = (\varphi_n\varphi'_m - \varphi_m\varphi'_n)'$.]

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι, για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους n και m με $n \neq m$, ισχύουν

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0\,.$$

20. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

(Ε) $$y'' + ky' = f,$$

όπου k είναι μια θετική σταθερά και f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$.

(i) Να δοθεί ένα παράδειγμα, όπου η f να είναι φραγμένη και έτσι ώστε όλες οι λύσεις της (Ε) να είναι μη φραγμένες.

(ii) Να αποδειχθεί ότι, αν $\int_0^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, τότε όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες.

21. Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης

(E_0) $$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1, n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[x_0, \infty)$ και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \geq x_0$. Να βρεθεί μία αναγκαία συνθήκη (επί των συναρτήσεων a_{n-1} και a_n), ώστε κάθε λύση της (E_0) καθώς και οι παράγωγοι μέχρι n-1 τάξης αυτής να είναι φραγμένες στο διάστημα $[x_0, \infty)$.

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy' + (\cos x)y = 0$$

έχει μια τουλάχιστον λύση τέτοια ώστε αυτή ή η παράγωγός της να μην είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, \infty)$.

22. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

(E_0) $$y'' + py' + qy = 0,$$
όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (α, β) με $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0). Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν οι y_1, y_2 έχουν κοινή ρίζα, τότε αυτές δεν αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

(ii) Αν οι y_1, y_2 έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στο ίδιο σημείο, τότε αυτές δεν αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

(iii) Αν οι y_1, y_2 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0), τότε αυτές δεν είναι δυνατόν να έχουν ένα κοινό σημείο καμπής, εκτός αν οι p και q μηδενίζονται στο σημείο αυτό.

(iv) Ας είναι $x^* \in (\alpha, \beta)$. Αν $y_1(x^*) = 0$ και $W(y_1, y_2)(x^*) = 0$, τότε είτε $y_1 = 0$ είτε $y_2 = [y'_2(x^*)/ y'_1(x^*)]y_1$.

23.(I) Ας είναι φ μια πραγματική μη τετριμμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$y''+\alpha y = 0$$
και ψ μια πραγματική μη τετριμμένη λύση της
$$y''+\beta y = 0,$$
όπου α και β είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα (a, b) με $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Έστω ότι ισχύει
$$\beta(x) > \alpha(x) \text{ για όλα τα } x\in (a, b).$$
Να αποδειχθεί ότι, αν x_1 και x_2 είναι δύο διαδοχικές ρίζες της φ, τότε η ψ έχει μια ρίζα ξ με $x_1<\xi<x_2$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ας υποτεθεί ότι $\psi(x)>0$ για $x\in (x_1, x_2)$ και ακόμα ότι $\varphi(x)>0$ για $x\in (x_1, x_2)$. Τότε
$$(\psi\varphi'-\varphi\psi')' = \psi\varphi''-\varphi\psi'' = (\beta-\alpha)\varphi\psi$$
και έτσι
$$\psi(x_2)\varphi'(x_2)-\psi(x_1)\varphi'(x_1) > 0,$$
αφού $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$. Να αποδειχθεί ότι $\varphi'(x_2)<0$ και $\varphi'(x_1)>0$.] Στη συνέχεια, ως μια εφαρμογή, να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$y''+xy = 0$$
έχει άπειρες ρίζες στό διάστημα $(0,\infty)$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να θεωρηθεί η εξίσωση $y''+y=0$ και να χρησιμοποιηθεί το παραπάνω συμπέρασμα με $\alpha(x)=1$, $\beta(x)=x$ και $\varphi(x)=\cos x$.]

(II) Ας είναι α μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $(0,\infty)$ που υπόκειται στη συνθήκη:

(*) Υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $\alpha(x)\geq\varepsilon$ για κάθε $x>0$.

Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+\alpha y = 0$$

έχει άπειρες λύσεις στο διάστημα $(0, \infty)$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να χρησιμοποιηθεί το (I).] Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος, να αποδειχθεί ότι το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει αν η (*) αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση: $\alpha(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να θεωρηθεί η εξίσωση $y''+\frac{1}{4x^2}y=0$.]

(III) Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y''+\alpha y = 0,$$

όπου α είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα (a, b) με $-\infty\leq a<b\leq\infty$. Να αποδειχθεί ότι, αν φ είναι μια μη τετριμμένη λύση η οποία έχει μια ρίζα x_0, τότε $\varphi'(x_0)\neq 0$. [ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια τέτοια ρίζα λέγεται *απλή*.] Στη συνέχεια, με τη βοήθεια αυτού του συμπεράσματος, να αποδειχθεί ότι οι ρίζες μιας μη τετριμμένης λύσης φ είναι *μεμονωμένες* (δηλαδή κάθε σημείο του συνόλου των ριζών δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως αυτού).

24. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+(x+1)^2y'-4(x+1)y=0$; $y(-1)=0$, $y'(-1)=1$.

(ii) $x(2-x)y''-6(x-1)y'-4y=0$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

(iii) $y''+y'+xe^xy=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

25. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''-(x+2)y = 0.$$

26. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y = 0.$$

27. Η διαφορική εξίσωση

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y = 0,$$

όπου α, β και γ είναι σταθερές, είναι γνωστή ως η *υπεργεωμετρική εξίσωση*.

(i) Να αποδειχθεί ότι $x=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και ότι οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης είναι 0 και $1-\gamma$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι $x=1$ είναι επίσης ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και ότι οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης είναι 0 και $\gamma-\alpha-\beta$.

(iii) Ας υποθέσουμε ότι ο γ δεν είναι ακέραιος. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της υπεργεωμετρικής εξίσωσης.

28. Με την αντικατάσταση $t=e^x$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0=0$ της διαφορικής εξίσωσης

$$(1-e^{x})y''+\frac{1}{2}y'+e^{x}y = 0.$$

29. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+x(x-3)y' + 3y = 0, \quad x > 0$$

δέχεται μια λύση της μορφής

$$y_1(x) = x^{\lambda}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\Big) \text{ για } x>0,$$

όπου $\lambda > 0$ και c_n $(n = 1,2,...)$ είναι πραγματικοί αριθμοί· να βρεθεί η λύση αυτή. Στη συνέχεια, να βρεθεί μια λύση y_2 της παραπάνω εξίσωσης, έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

30. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad x>0.$$

[Δίνεται ότι $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$ για $x \in \mathbf{R}$.]

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΘΕΜΑΤΑ
ΓΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ I

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

(E) $$y' + ay = b$$

καθώς και η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$y' + ay = 0,$$

όπου a *και* $b \neq 0$ *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στην πραγματική ευθεία* **R**, *οι οποίες είναι περιοδικές με περίοδο* $\omega > 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I. (i) *Να αποδειχθεί ότι, αν* y *είναι μία λύση της* (E_0), *τότε η συνάρτηση* z *με* $z(x) = y(x+\omega)$ *για* $x \in \mathbf{R}$ *είναι επίσης μία λύση της* (E_0).

(ii) *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία σταθερά* $c > 0$ *έτσι ώστε, για κάθε λύση* y *της* (E_0), *να είναι* $y(x+\omega) = cy(x)$ *για όλα τα* $x \in \mathbf{R}$. $\left(\text{Είναι } c = \exp\left[-\int_0^\omega a(t)dt\right].\right)$

(iii) *Να βρεθεί μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η* (E_0) *να έχει μία μη μηδενική περιοδική λύση με περίοδο* ω. *Επίσης, να βρεθεί μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η* (E_0) *να έχει μία μη μηδενική περιοδική λύση με περίοδο* 2ω. *Οι συνθήκες αυτές θα αναφέρονται επί του συντελεστή* a. *Ποιές είναι οι συνθήκες αυτές όταν ο συντελεστής* a *είναι σταθερός;*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II. (i) *Ας είναι* y *μία λύση της* (E). *Να αποδειχθεί ότι η* y *είναι περιοδική με περίοδο* ω *αν και μόνο αν* $y(0) = y(\omega)$.

(ii) *Να αποδειχθεί ότι, αν δεν υπάρχει μη μηδενική λύση της* (E_0) *που να είναι περιοδική με περίοδο* ω, *τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση της* (E) *που είναι περιοδική με περίοδο* ω.

(iii) *Ας υποθέσουμε ότι η* (E_0) *έχει μία μη μηδενική περιοδική λύση με περίοδο* ω. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν περιοδικές λύσεις με περίοδο* ω *της* (E) *αν και μόνο αν*

$$\int_0^\omega b(t)\exp\left[\int_0^t a(s)ds\right]dt = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ. Να βρεθούν περιοδικές λύσεις με περίοδο 2π για καθεμία από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$y' + 3y = \cos x, \quad y' + (\cos x)y = \sin 2x.$$

ΘΕΜΑ II

Έστω η *διαφορική εξίσωση Riccati*

(E) $$y' + ay + by^2 + c = 0,$$

όπου a, b *και* c *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας και καθεμία από τις συναρτήσεις* b *και* c *δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο* I.

Να αποδειχθεί η ακόλουθη Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ας υποθέσουμε ότι* $b(x) \neq 0$ *για όλα τα* $x \in I$ *και ότι η* b *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο* I. *Τότε η αντικατάσταση* $y = z/b$ *μετασχηματίζει την* (E) *σε μία διαφορική εξίσωση Riccati με συντελεστή του* z^2 *το* 1.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαφορική εξίσωση, στην οποία μετασχηματίζεται η (E), είναι $z' + (a - b'/b)z + z^2 + bc = 0$.

Τώρα, ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση Riccati

(E*) $$z' + z^2 + pz + q = 0,$$

όπου p *και* q *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *και η* q *δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο* I.

Να αποδειχθεί το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ο μετασχηματισμός*

$$u(x) = \exp\left[\int z(x)dx\right] \quad \textit{ή} \quad z(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

μετασχηματίζει την (E*) *στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*

$$u'' + pu' + qu = 0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση Riccati

$$y'-y-e^{-x}y^2-e^x = 0.$$

ΘΕΜΑ III

Έστω η *διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών*

(E) $$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

όπου f *είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση σε ένα διάστημα* (x_1, x_2) *με* $-\infty \le x_1 < x_2 \le \infty$ *και* g *είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση σε ένα διάστημα* (y_1, y_2) *με* $-\infty \le y_1 < y_2 \le \infty$, *τέτοια ώστε* $g(y) \ne 0$ *για όλα τα* $y \in (y_1, y_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, *μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $g(y) > 0$ *για* $y \in (y_1, y_2)$.

Ας είναι $x_0 \in (x_1, x_2)$ και $y_0 \in (y_1, y_2)$ και ας θεωρήσουμε την αρχική συνθήκη

(C) $$y(x_0) = y_0.$$

Να αποδειχθεί το παρακάτω Θεώρημα για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Υπάρχει ακριβώς μία λύση του προβλήματος αρχικών τιμών* (E)-(C) *ορισμένη σε μία περιοχή* $N(x_0)$ *του* x_0. *Η μοναδική αυτή λύση του* (E)-(C) *δίνεται από τον τύπο*

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0)+\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) \quad \text{για } x \in N(x_0),$$

όπου G *είναι μία αρχική συνάρτηση της συνάρτησης* $1/g$ *και* G^{-1} *είναι η αντίστροφη συνάρτηση της* G.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$y' = (x+x^3)e^{-y}, \ y(0) = 1;$$

$$y' = 1+y^2, \ y(0) = 2;$$

$$y' = (\cos x)/(1+e^y), \ y(\pi/2) = 3.$$

ΘΕΜΑ IV

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0,1,\dots,n-1)$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας.*

Για τυχόν n-διάστατο διάνυσμα c με συνιστώσες $c_1,c_2,\dots,c_n$, συμβολίζουμε με $\|c\|$ την Ευκλείδεια norm του c, δηλαδή

$$\|c\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Να αποδειχθεί το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* a_i $(i = 0,1,\dots,n-1)$ *είναι φραγμένες στο* I *και ας είναι*

$$K = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x\in I} |a_i(x)|.$$

Τότε, για τυχούσα λύση y *της* (E_0) *και για οποιοδήποτε σημείο* $x_0\in I$, *ισχύει*

$$\|Y(x_0)\|e^{-K|x-x_0|} \le \|Y(x)\| \le \|Y(x_0)\|e^{K|x-x_0|} \quad \text{για όλα τα } x\in I,$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ορίσουμε

$$u(x) = \|Y(x)\|^2 \quad \text{για } x\in I,$$

έχουμε

$$u = y\overline{y} + y'\,\overline{y'} + \dots + y^{(n-1)}\,\overline{y^{(n-1)}}$$

και επομένως

$$u' = y'\,\overline{y} + y''\,\overline{y'} + \dots + y^{(n)}\,\overline{y^{(n-1)}} + y\,\overline{y'} + y'\,\overline{y''} + \dots + y^{(n-1)}\,\overline{y^{(n)}}\,.$$

Άρα, για κάθε $x\in I$, είναι

$$|u'(x)| \le 2|y(x)|\,|y'(x)| + 2|y'(x)|\,|y''(x)| + \dots + 2|y^{(n-1)}(x)|\,|y^{(n)}(x)|.$$

Τελικά, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$|u'(x)| \le 2Ku(x) \quad \text{για όλα τα } x\in I,$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ V

Έστω η τρίτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου a_0, a_1, a_2 *και* a_3 *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας και* $a_3(x) \neq 0$ *για όλα τα* $x \in I$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ας είναι* y_1 *και* y_2 *δύο λύσεις της* (E_0) *τέτοιες ώστε*

$$y_1(x) \neq 0 \ \text{και} \ (y_2/y_1)'(x) \neq 0 \quad \text{για όλα τα } x \in I.$$

Να επιλυθεί η (E_0) *με αναγωγή αυτής σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.*

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Πρώτα από όλα, παρατηρούμε ότι οι λύσεις y_1 και y_2 είναι αναγκαστικά γραμμικά ανεξάρτητες. Με τις αντικαταστάσεις $y = y_1u$ και $u' = v$, η (E_0) ανάγεται σε μία δεύτερης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$(E_0)'$ $$A_2v'' + A_1v' + A_0v = 0,$$

όπου A_0, A_1 και A_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I και $A_2(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Η συνάρτηση $v_1 = (y_2/y_1)'$ είναι μία λύση της $(E_0)'$ με $v_1(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Έτσι, με τις αντικαταστάσεις $v = v_1w$ και $w' = z$, η $(E_0)'$ ανάγεται σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$(E_0)''$ $$Pz' + Qz = 0,$$

όπου P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I και $P(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Η διαφορική εξίσωση $(E_0)''$ έχει τη λύση

$$z_0(x) = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{Q(r)}{P(r)}\,dr\right] \quad \text{για } x \in I,$$

όπου x_0 είναι τυχόν σημείο του I. Τότε μία λύση της (E_0) είναι η συνάρτηση

$$y_3(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(t) \left[\int_{x_0}^{t} z_0(s)\,ds\right] dt, \quad x \in I.$$

Οι y_1, y_2 και y_3 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

ΑΣΚΗΣΗ. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^3y''' - 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0,$$

αφού διαπιστωθεί ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = x$, $x > 0$ και $y_2(x) = x^3$, $x > 0$ είναι δύο λύσεις αυτής.

ΘΕΜΑ VI

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ *είναι σταθερές και* $a_n \neq 0$.

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (E_0) είναι

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Να αποδειχθεί το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ας είναι σ ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της* (E_0). *Τότε, για κάθε λύση* y *της* (E_0), *υπάρχει σταθερά* $K > 0$ *έτσι ώστε*

$$|y^{(k)}(x)| \leq Ke^{\sigma x} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0 \quad (k = 0,1,\ldots,n-1).$$

Μία αξιόλογη συνέπεια του Θεωρήματος αυτού είναι το παρακάτω Πόρισμα, το οποίο δίνει ικανές συνθήκες για να τείνουν προς το 0 για $x \to \infty$ οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (E_0).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της* (E_0) *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε κάθε λύση της* (E_0) *καθώς και οι παράγωγοι μέχρι* n-1 *τάξης αυτής τείνουν στο* 0 *για* $x \to \infty$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ. Ας είναι $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ οι διακεκριμμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (E_0) με πολλαπλότητες $m_1,\ldots,m_s$ αντίστοιχα (όπου $m_1+\ldots+m_s = n$). Τότε οι συναρτήσεις

$$y_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (j = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 1,\ldots,s)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σταθερές $K_{ij} > 0$ $(j = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 1,\ldots,s)$ τέτοιες ώστε

$$|y_{ij}(x)| \leq K_{ij}e^{\sigma x} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0 \quad (j = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 1,\ldots,s).$$

Είναι

$$|e^{\lambda_i x}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)x} = e^{-\gamma_i x}\, e^{\sigma x} \quad \text{για } x \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,s),$$

όπου $\gamma_i = \sigma - \mathrm{Re}\lambda_i > 0$ $(i = 1,\ldots,s)$.

ΘΕΜΑ VII

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ *είναι σταθερές και* $a_n \neq 0$.

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (E_0) είναι

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0.$$

Να αποδειχθεί το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ *είναι οι διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της* (E_0) *με πολλαπλότητες* $m_1,\ldots,m_s$ *αντίστοιχα (όπου* $m_1+\ldots+m_s = n$*). Τότε:*

(i) *Όλες οι λύσεις της* (E_0) *καθώς και οι παράγωγοι μέχρι* $n-1$ *τάξης αυτών είναι φραγμένες στο διάστημα* $[0, \infty)$ *αν και μόνο αν, για κάθε* $i \in \{1,\ldots,s\}$, *είναι* $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0$ *και επιπλέον* $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ *συνεπάγεται* $m_i = 1$.

(ii) *Όλες οι λύσεις της* (E_0) *καθώς και οι παράγωγοι μέχρι* $n-1$ *τάξης αυτών τείνουν στο* 0 *για* $x \to \infty$ *αν και μόνο αν* $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1,\ldots,s)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Οι συναρτήσεις

$$y_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (j = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 1,\ldots,s)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Ας είναι i τυχών δείκτης στο σύνολο $\{1,\ldots,s\}$ και ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(I) $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$,

(II) $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ και $m_i = 1$,

(III) $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ και $m_i > 1$,

(IV) $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$.

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις (I)-(IV), θα εξετασθεί αν αληθεύει ή όχι ότι οι συναρτήσεις $y_{ij}^{(k)}$ $(k = 0,1,\ldots,n-1;\ j = 0,1,\ldots,m_i-1)$ είναι φραγμένες στο $[0, \infty)$ καθώς και αν αληθεύει ή όχι ότι $\lim_{x\to\infty} y_{ij}^{(k)}(x) = 0$ $(k = 0,1,\ldots,n-1;\ j = 0,1,\ldots,m_i-1)$.

ΘΕΜΑ VIII

Έστω η n-τάξης $(n > 1)$ ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (*Διαφορική Εξίσωση Euler)*

(E_0) $$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$
όπου a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ *είναι σταθερές και* $a_n \neq 0$.

Ας είναι $I = (0, \infty)$ ή $I = (-\infty, 0)$ το *διάστημα ορισμού* της εξίσωσης (E_0).

Το n βαθμού πολυώνυμο
$$q(r) = a_n r(r-1)\ldots[r-(n-1)] + a_{n-1} r(r-1)\ldots[r-(n-2)] + \ldots + a_1 r + a_0$$
καλείται το *ενδεικτικό πολυώνυμο* της (E_0).

Να αποδειχθεί το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο δίνει ένα βασικό σύνολο λύσεων της Euler εξίσωσης (E_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ας είναι* $r_1,\ldots,r_s$ *οι διακεκριμμένες ρίζες του ενδεικτικού πολυωνύμου της* (E_0) *με πολλαπλότητες* $m_1,\ldots,m_s$ *αντίστοιχα (όπου* $m_1+\ldots+m_s = n$*). Τότε οι συναρτήσεις*
$$y_{ij}(x) = |x|^{r_i} \log^j |x|, \quad x \in I \quad (j = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 1,\ldots,s)$$
αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

Ας θεωρήσουμε, ειδικά, την δεύτερης τάξης Euler εξίσωση

(ε_0) $$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$
όπου a_0, a_1 *και* a_2 *είναι σταθερές με* $a_2 \neq 0$. Ας είναι $I = (0,\infty)$ ή $I = (-\infty, 0)$ το *διάστημα ορισμού* αυτής. Το *ενδεικτικό πολυώνυμο* της (ε_0) είναι
$$q(r) = a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0.$$
Το ακόλουθο Πόρισμα δίνει ένα βασικό σύνολο λύσεων της (ε_0).

ΠΟΡΙΣΜΑ. (i) *Αν το ενδεικτικό πολυώνυμο της* (ε_0) *έχει δύο διακεκριμμένες ρίζες* r_1 *και* r_2, *τότε οι συναρτήσεις*
$$y_1(x) = |x|^{r_1}, \ x \in I \quad \text{και} \quad y_2(x) = |x|^{r_2}, \ x \in I$$
αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (ε_0).

(ii) *Αν το ενδεικτικό πολυώνυμο της* (ε_0) *έχει μία διπλή ρίζα* r_0, *τότε οι συναρτήσεις*
$$y_1(x) = |x|^{r_0}, \ x \in I \quad \text{και} \quad y_2(x) = |x|^{r_0} \log|x|, \ x \in I$$
αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (ε_0).

ΘΕΜΑ IX

Να αποδειχθεί το ακόλουθο Λήμμα για φραγμένες συναρτήσεις που έχουν φραγμένες παραγώγους δεύτερης τάξης.

ΛΗΜΜΑ. *Ας είναι* h *μία δύο φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση σε ένα διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές* K *και* M *έτσι ώστε*

$$|h(x)| \leq K \quad \textit{και} \quad |h''(x)| \leq M \qquad \textit{για κάθε } x \in I.$$

Αν L *είναι το μήκος του διαστήματος* I *και*

(i) *το* I *είναι κλειστό και* $L \geq 2\sqrt{K/M}$

ή

(ii) $L > 2\sqrt{K/M}$,

τότε

$$|h'(x)| \leq 2\sqrt{KM} \qquad \textit{για όλα τα } x \in I.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν σημείο $x \in I$. Μπορούμε να θεωρήσουμε δύο σημεία x_1 και x_2 του I με $x_1 \leq x \leq x_2$ και τέτοια ώστε $x_2 - x_1 = 2\sqrt{K/M}$. Τότε έχουμε

$$h(x_2)-h(x) = (x_2-x)h'(x) + \frac{1}{2}(x_2-x)^2 h''(\xi)$$

και

$$h(x_1)-h(x) = (x_1-x)h'(x) + \frac{1}{2}(x_1-x)^2 h''(\eta),$$

όπου $x_1 \leq \eta \leq x \leq \xi \leq x_2$. Έτσι, παίρνουμε

$$h(x_2)-h(x_1) = (x_2-x_1)h'(x) + \frac{1}{2}\left[(x_2-x)^2 h''(\xi)-(x_1-x)^2 h''(\eta)\right].$$

Επειδή

$$(x_2-x)^2+(x_1-x)^2 \leq (x_2-x_1)^2,$$

καταλήγουμε εύκολα στην ζητούμενη ανισότητα.

Με τη βοήθεια του παρακάτω Λήμματος, να αποδειχθεί η ακόλουθη Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ας είναι* h *μία δύο φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση σε ένα διάστημα* $[x_0, \infty)$. *Τότε:*

(I) *Αν η* h *είναι φραγμένη στο* $[x_0, \infty)$ *και είναι* $\lim_{x\to\infty} h''(x) = 0$, *τότε ισχύει* $\lim_{x\to\infty} h'(x) = 0$.

(II) *Αν* $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ *και η* h'' *είναι φραγμένη στο* $[x_0, \infty)$, *τότε ισχύει* $\lim_{x\to\infty} h'(x) = 0$. *Γενικότερα, αν το* $\lim_{x\to\infty} h(x)$ *υπάρχει στην πραγματική ευθεία* **R** *και η* h'' *είναι φραγμένη στο* $[x_0, \infty)$, *τότε* $\lim_{x\to\infty} h'(x) = 0$.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την δεύτερης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''+py'+qy = r,$$

όπου p, q *και* r *είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σε ένα διάστημα* $[x_0, \infty)$.

Με χρήση του Λήμματος, να αποδειχθεί το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* p, q *και* r *είναι φραγμένες στο διάστημα* $[x_0, \infty)$ *και ας είναι* y *μία πραγματική λύση της* (E). *Αν η* y *είναι φραγμένη στο* $[x_0, \infty)$, *τότε και οι παράγωγοι* y' *και* y'' *αυτής είναι επίσης φραγμένες στο διάστημα* $[x_0, \infty)$.

Ας σημειώσουμε ότι το Λήμμα και η Πρόταση μπορούν να γενικευθούν για συναρτήσεις που είναι n-φορές $(n \geq 2)$ παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα I, ενώ το Θεώρημα μπορεί να επεκταθεί σε n-τάξης $(n \geq 2)$ γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Ειδικά, το Λήμμα γενικεύεται ως ακολούθως:

Ας είναι h *μία* n-*φορές, όπου* $n \geq 2$, *παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση σε ένα διάστημα* I *της πραγματικής ευθείας και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές* $K > 0$ *και* $M > 0$ *έτσι ώστε*

$$|h(x)| \leq K \quad \textit{και} \quad |h^{(n)}(x)| \leq M \quad \textit{για κάθε } x \in I.$$

Αν L *είναι το μήκος του διαστήματος* I *και* (i) *το* I *είναι κλειστό και* $L \geq 2(K/M)^{1/n}$ *ή* (ii) $L > 2(K/M)^{1/n}$, *τότε*

$$|h^{(j)}(x)| \leq c_n K^{1-j/n} M^{j/n} \quad \textit{για όλα τα } x \in I \quad (j = 1,2,\ldots,n-1),$$

όπου $c_n \equiv 2^{2^n-2}$.

ΘΕΜΑ X

Ας είναι p, q και r σταθερές, όπου r δεν είναι ένας μη θετικός ακέραιος, και έστω η δυναμοσειρά

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!r(r+1)\ldots(r+n-1)} x^n.$$

Η δυναμοσειρά αυτή είναι γνωστή ως η *υπεργεωμετρική σειρά* και το άθροισμα αυτής συμβολίζεται με F(p,q,r; x). Όταν p = 1 και r = q, η υπεργεωμετρική σειρά είναι η γνωστή γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, δηλαδή

$$F(1,q,q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{για } |x| < 1.$$

Αν μία τουλάχιστον από τις σταθερές p και q είναι ένας μη θετικός ακέραιος, τότε η υπεργεωμετρική σειρά είναι ένα πολυώνυμο (και συνεπώς συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbf{R}$). Διαφορετικά, δηλαδή όταν ούτε η σταθερά p ούτε η q είναι ένας μη θετικός ακέραιος, η υπεργεωμετρική σειρά συγκλίνει για $|x| < 1$. Η συνάρτηση F(p,q,r; x) είναι γνωστή ως η *υπεργεωμετρική συνάρτηση.*

Τώρα, έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (γνωστή ως η *υπεργεωμετρική εξίσωση*)

(E) $$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0,$$

όπου a, b *και* c *είναι σταθερές.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (i) *Ας υποθέσουμε ότι* c *δεν είναι ένας ακέραιος. Να αποδειχθεί ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες δυναμοσειρές-λύσεις της* (E) *γύρω από το σημείο* $x_0 = 0$ *είναι οι*

$$y_1(x) = F(a,b,c;\, x) \quad \text{για } |x| < 1$$

και

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c;\, x) \quad \text{για } |x| < 1.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Η αντικατάσταση $y = x^{1-c}z$ μετασχηματίζει την (E) στην

$$x(1-x)z'' + [(2-c)-((a-c+1)+(b-c+1)+1)x]z' - (a-c+1)(b-c+1)z = 0.$$

(ii) *Ας υποθέσουμε ότι* c-a-b *δεν είναι ένας ακέραιος. Να αποδειχθεί ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες δυναμοσειρές-λύσεις της* (E) *γύρω από το σημείο* $x_0 =$ 1 *είναι οι*

$$y_1(x) = F(a,b,a+b-c+1;\, 1-x) \quad \text{για } |x-1| < 1$$

και

$$y_2(x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-b,c-a,c-a-b+1;\, 1-x) \quad \text{για } |x-1| < 1.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Η αλλαγή μεταβλητής $t = 1-x$ μετατρέπει την (E) στην

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [(a+b-c+1)-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt} - aby = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ Α. Για καθεμία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να βρεθούν οι δυναμοσειρές-λύσεις γύρω από το σημειούμενο σημείο:

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0;$$

$$(2x^2+2x)y'' + (1+5x)y' + y = 0, \quad x_0 = 0;$$

$$(x^2-1)y'' + (5x+4)y' + 4y = 0, \quad x_0 = -1;$$

$$(x^2-x-6)y'' + (5+3x)y' + y = 0, \quad x_0 = 3.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = e^x$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές-λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της διαφορικής εξίσωσης

$$(1-e^x)y'' + \frac{1}{2}\ y' + e^x y = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ C. Έστω η διαφορική εξίσωση Chebyshev

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y = 0,$$

όπου p είναι μία μη αρνητική σταθερά. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = (1-x)/2$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές-λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 1$, της διαφορικής εξίσωσης αυτής.